同學問：「公式 $v = \lambda f$ 不就是表示了『波速 v 正比於頻率 f』嗎？」

中學數學：

若 $x \propto y$，則 $x = ky$，其中 k 為非零常數。

反過來說，

$p = qr$ 不表示 $p \propto q$，除非 r 是非零常數。

所以說，

- $v = f\lambda$ 表示了「v 正比於 f」是錯誤的，因為 λ 並不是常數。
- 反之，v、f 和 λ 三者中 v 有時候是常數，有時候不是。若 v 真是常數，那可以說「λ 反比於頻率 f」。
- 但波速 v 是常數或不是常數，這要從有關的物理才可得知，斷不可以從 "$v = f\lambda$" 知道。

甚麼波動的波速 v 是常數？甚麼波動的波速 v 與頻率有關？ 讀者可否舉一些例子？

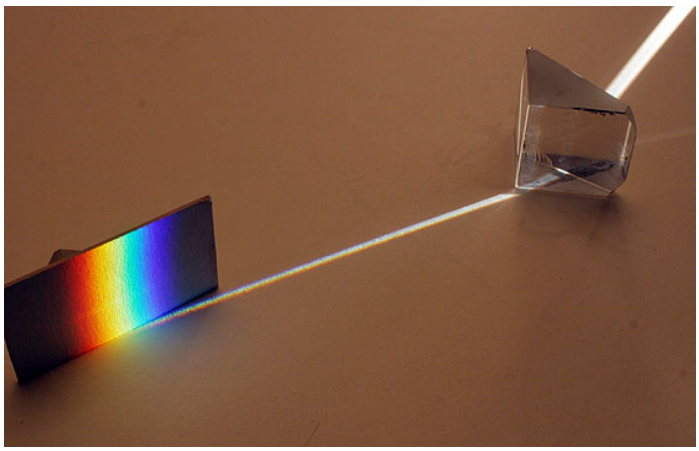
Case 1: 波速 v 是常數 (與頻率無關)

- 例子： 電磁波在真空傳播

  聲波在空氣傳播（只是近似是這樣）

Case 2: 波速 v 與頻率有關 (但絕不是正比或反比那麼簡單)

- 最著名的例子是光經過玻璃或水的色散(dispersion)現象。



在玻璃，紅光 (低頻) 比紫光 (高頻) 行得稍快一些。

波速 v 與甚麼有關或無關， 是不能從 "$v = f\lambda$" 知道。這是要從有關的物理才可得知。

公式 "$v = f\lambda$" 只是告訴我們 v、f 與 λ 三者的數學關係， 但不能告訴我們它們之間的因果關係。

對初學者而言，它們之間的因果關係簡化來說是這樣：

- 頻率 f 純粹決定於發射器。水波槽的振動器振得越快，水波越高頻；揚聲器的振動膜振動越快，產生的聲音越高頻。甚麼顏色光源發出甚麼顏色(頻率)光。（多普勒效應 Doppler effect：波源的速度也會決定發出的波的頻率。著名例子是“紅移”現象）。

  波動從發射器發射後，頻率 f 就不會改變。頻率是一個波的“身份編碼”，無論之後發生反射、折射、衍射、干涉，... 或甚麼現象，波的頻率不會發生改變。

- 波速 v 決定於傳播介質及有可能也與頻率有關。
  - ➔ 聲音在空氣，液體，或固體不同介質的傳播速度有別。
  - ➔ 光在真空，水，或玻璃不同介質的傳播速度有別。
  - ➔ 不同顏色 (頻率) 光在玻璃或水的速度也不同。

➔ 水波槽的水波波速與水深有關；深水海洋的水波波速與水深無關，但與水波的頻率(波長)有關。

➔ 行走中的觀察者會看到不一樣的波速（如車上乘客看街上行人），這令觀察者接收到的波頻率有別於波的本有頻率（多普勒效應）。

➢ 知道了波速 v 及頻率 f 之後，波長 λ 由 $\lambda=\frac{v}{f}$ 決定。

附 加 討 論：

1. 電阻功率可以寫為

$$P=I^2R \quad \text{.....(1.1)}$$

但亦可寫為 $P=\dfrac{V^2}{R}$ .....(1.2)

式 (1.1) 說 $P\propto R$，但式 (1.2) 又說 $P\propto\dfrac{1}{R}$，為甚麼這麼矛盾？

2. 向心加速

$$a=\omega^2 r \quad \text{.....(2.1)}$$

但亦可寫為 $a=\dfrac{v^2}{r}$ .....(2.2)

式 (2.1) 說 $a\propto r$，但式 (2.2) 又說 $a\propto\dfrac{1}{r}$，為甚麼這麼矛盾？

又是那一句，若 $x = yz$，只有當 y 是常數時，x 才可以說與 z 正比。

- $P=I^2R \Rightarrow P\propto R$，這個要電流 I 是常數時才成立。譬如電阻在串聯 (in series) 時，I 就是常數，那時的確 $P\propto R$。
- $P=\dfrac{V^2}{R} \Rightarrow P\propto\dfrac{1}{R}$，這個要電壓 V 是常數時才成立。譬如電阻在並聯 (in parallel) 時，V 就是常數，那時就是 $P\propto\dfrac{1}{R}$。
- $a=\omega^2 r \Rightarrow a\propto r$，這個要大家的角速度 ω 相同時才成立。

譬如放在同一個轉盤上不同位置的物體，大家的 ω 相同，向心加速正比於曲率半徑 r。

- $a=\frac{v^2}{r} \Rightarrow a \propto \frac{1}{r}$，這個要大家的線速率 v 相同時才成立。

譬如一輛車以相同車速 v 轉不同的彎，向心加速反比於曲率半徑 r。

練習：

1. 已知水波槽水波的波速 v 與水深 h 的關係是

$$v=\sqrt{gh} \quad , \qquad \text{.....} \ (1.1)$$

其中 g 是引力加速度。若果水波槽的水深減半，問頻率、波長和波速如何改變？

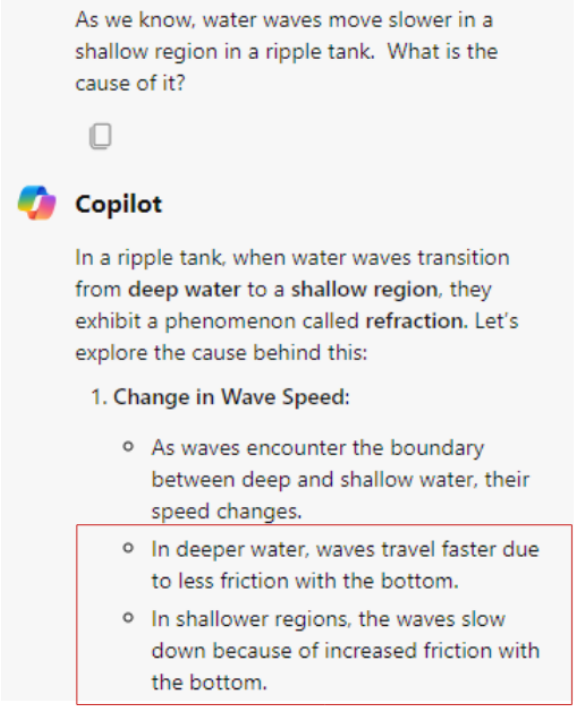
2. 式(1.1)只適用於淺水區(淺水區水深也可以有變化)，但何謂之「淺水」？

這並不是以人的標準來說的，而是相對水波的波長。換言之，當 $h \ll \lambda$ ，式 (1.1) 就會大概成立。

請同學在網上搜尋海嘯(tsunami)中海浪波的典型波長是多少？如果與一般海洋的水深比較，上述條件是否滿足？

有關的一則新聞 *https://www.ettoday.net/news/20220117/2170680.htm*

筆者向 Microsoft 的 AI Copilot 問了以下問題：As we know, water waves move slower in a shallow region in a ripple tank. What is the cause of it? 它的回答是



As we know, water waves move slower in a shallow region in a ripple tank. What is the cause of it?

Copilot

In a ripple tank, when water waves transition from **deep water** to a **shallow region**, they exhibit a phenomenon called **refraction**. Let's explore the cause behind this:

1. **Change in Wave Speed:**
   - As waves encounter the boundary between deep and shallow water, their speed changes.
   - In deeper water, waves travel faster due to less friction with the bottom.
   - In shallower regions, the waves slow down because of increased friction with the bottom.

這個答案簡直就是胡扯、胡說八道！

淺水區水波行慢了是因爲水波與水底的摩擦增大了！？ 很簡單的說明，上頁的公式（1.1）中有摩擦這一參數嗎？事實上，公式（1.1）是假設了水是 non-viscous（沒有摩擦）而推導出來的。Copilot 這個所謂「解釋」筆者在多年也曾見過，相信是因爲中學物理書本對此現象沒有解釋，一些人唯有自己堆砌一個理由來忽悠學生了。想不到聰明的 AI 也是這樣愚蠢的！

✷✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷✷

作者：吳老師 (*Chiu-King Ng*)

https://ngsir.netfirms.com

http://phy.hk

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數