

同學問：「公式 $v = \lambda f$ 不就是表示了『波速 v 正比於頻率 f 』嗎？」由此談起波動的一些性質

中學數學：

若 $x \propto y$ ，則 $x = ky$ ，其中 k 為非零常數。

反過來說，

$p = qr$ 不表示 $p \propto q$ ，除非 r 是非零常數。

所以說，

- ◆ $v = f\lambda$ 表示「 v 正比於 f 」是錯的，因為 λ 並不是常數。
- ◆ 反之， v 、 f 和 λ 三者中 v 有時候是常數，有時候不是。若 v 真是常數，那可以說「 λ 反比於頻率 f 」。
- ◆ 但波速 v 是常數或不是常數，這要從有關的物理才可得知，斷不可以從 $v = f\lambda$ 知道。

甚麼波動的波速 v 是常數？甚麼波動的波速 v 與頻率有關？讀者可否舉一些例子？

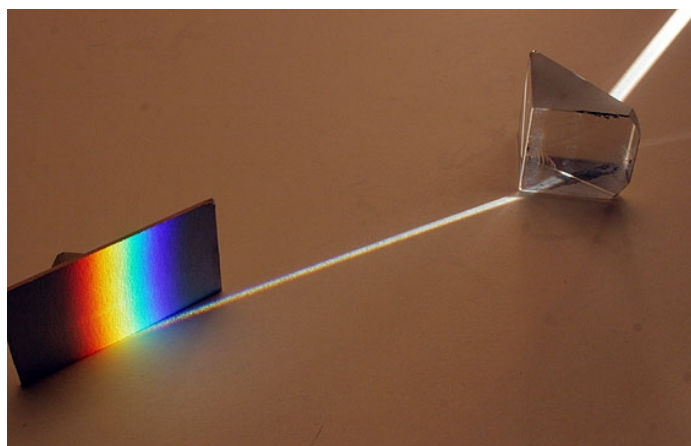
Case 1: 波速 v 是常數 (與頻率無關)

- 例子：電磁波在真空傳播

聲波在空氣傳播 (只是近似是這樣)

Case 2: 波速 v 與頻率有關 (但絕不是正比或反比那麼簡單)

- 最著名的例子是光經過玻璃或水的色散(dispersion)現象。



在玻璃，紅光 (低頻) 比紫光 (高頻) 行得稍快一些。

波速 v 與甚麼有關或無關，是不能從 $v = f\lambda$ 知道。這是要從有關的物理才可得知。

公式 $v = f\lambda$ 只是告訴我們 v 、 f 與 λ 三者之間的數學關係，但不能告訴我們它們之間的因果關係。

對初學者而言，它們之間的因果關係簡化來說是這樣：

- **頻率 f 純粹決定於發射器。** 水波槽的振動器振得越快，水波越高頻；揚聲器的振動膜振動越快，產生的聲音越高頻；電台廣播發射的無線電波以它的頻率來標示；甚麼顏色光源發出甚麼顏色(頻率)光。(多普勒效應 Doppler effect：波源的速度也會決定發出的波的頻率。著名例子是“紅移”現象)。

波動從發射器發射後，頻率 f 就不會改變。頻率是一個波的「身份編碼」，無論之後發生反射、折射、衍射、干涉、... 或甚麼現象，波的頻率不會發生改變。

- **波速 v 決定於傳播介質及有可能也與頻率有關。**

- ➔ 聲音在空氣，液體，或固體不同介質的傳播速度有別。
 - ➔ 光在真空，水，或玻璃不同介質的傳播速度有別。
 - ➔ 不同顏色 (頻率) 光在玻璃或水的速度也不同。
 - ➔ 水波槽的水波波速與水深有關；深水海洋的水波波速與水深無關，但與水波波長有關。
 - ➔ 行走中的觀察者會看到不一樣的波速(如車上乘客看街上行人)，這令觀察者接收到的波頻率有別於波的本有頻率 (多普勒效應)。
- 知道了波速 v 及頻率 f 之後，波長 λ 由 $\lambda = \frac{v}{f}$ 決定。



附加討論：

1. 電阻功率可以寫為

$$P = I^2 R \quad \dots\dots\dots(1.1)$$

但亦可寫為 $P = \frac{V^2}{R} \quad \dots\dots\dots(1.2)$

式 (1.1) 說 $P \propto R$ ，但式 (1.2) 又說 $P \propto \frac{1}{R}$ ，為甚麼這麼矛盾？

2. 向心加速

$$a = \omega^2 r \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

但亦可寫為 $a = \frac{v^2}{r} \quad \dots\dots\dots(2.2)$

式 (2.1) 說 $a \propto r$ ，但式 (2.2) 又說 $a \propto \frac{1}{r}$ ，為甚麼這麼矛盾？

又是那一句，若 $x = yz$ ，只有當 y 是常數時， x 才可以說與 z 正比。

- $P = I^2 R \Rightarrow P \propto R$ ，這個要電流 I 是常數時才成立。譬如電阻在串聯 (in series) 時， I 就是常數，那時的确 $P \propto R$ 。

- $P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow P \propto \frac{1}{R}$ ，這個要電壓 V 是常數時才成立。譬如電

阻在並聯 (in parallel) 時， V 就是常數，那時就是 $P \propto \frac{1}{R}$ 。

- $a = \omega^2 r \Rightarrow a \propto r$ ，這個要大家的角速度 ω 相同時才成立。

譬如放在同一個轉盤上不同位置的物體，大家的 ω 相同，向心加速正比於曲率半徑 r 。

- $a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow a \propto \frac{1}{r}$ ，這個要大家的線速率 v 相同時才成立。譬

如一輛車以相同車速 v 轉不同的彎，向心加速反比於曲率半徑 r 。



練習：

1. 已知水波槽水波的波速 v 與水深 h 的近似關係是

$$v = \sqrt{gh} \quad (3)$$

其中 g 是引力加速度。若果水波槽的水深減半，問頻率、波長和波速如何改變？

2. 式 (3) 只適用於淺水區(淺水區水深也可以有變化)，但何謂之「淺水」？這

並不是以人的標準來說的，而是相對水波的波長。換言之，當 $h \ll \lambda$ ，

式 (3) 就大概成立。

請同學在網上搜尋海嘯波 (tsunami) 的典型波長是多少？若比較全世界海洋的平均水深 (約 4 km)，式 (3) 是否可應用於海嘯波？


一則有關新聞 <https://www.ettoday.net/news/20220117/2170680.htm>



筆者向人工智能 AI 發問有關水波波速的問題

2024 年問：

As we know, water waves move slower in a shallow region in a ripple tank. What is the cause of it?



Copilot

In a ripple tank, when water waves transition from **deep water** to a **shallow region**, they exhibit a phenomenon called **refraction**. Let's explore the cause behind this:

1. Change in Wave Speed:

- As waves encounter the boundary between deep and shallow water, their speed changes.
- In deeper water, waves travel faster due to less friction with the bottom.
- In shallower regions, the waves slow down because of increased friction with the bottom.

水波在淺水區行慢了是因為水波與水底的摩擦大了（水面與水底較接近）。**這說法很常見，但是錯的。**

1. 公式 (3) 是假設了水是 non-viscous (沒有摩擦) 而推導出來，所以公式中沒有 viscosity 這一參數。亦即是在假設水是 non-viscous (frictionless) 之下已表現出「淺水波波速受水深影響」這特性來。
2. 水波在淺水區從深水進入淺水，波速慢了；但從淺水區再返回深水區，波速變快。這又如何可從「水底摩擦」得到解釋？水底摩擦如何也不可能把水波變快的？
3. 水波波形前進，但水下粒子只作前後 (也會上下，除了緊貼水底那些水粒子) 週期性運動 (periodic motion)。水底摩擦作用於水底粒子的方向既是向後，也會向前。即是說，水底摩擦不是單一地「相反於波動前進方向」。
4. 根據流體力學理論，bottom friction 對水波的主要影響是令其振幅衰減 (amplitude attenuation)，其對波速的影響很小，一般情況下可忽略。

2025 -10 月再問:

Water waves travel slower in relatively shallower regions and faster in relatively deeper regions in shallow water. Please give a simple, clear physical explanation for high school students.

下午7:51 ✓

 GPT-5

Here's a simple way to picture it:

- A water wave isn't just the surface moving; the water underneath also moves in circular or back-and-forth paths as the wave passes.
- In deep water, those motions can extend fairly far down without "bumping into" the bottom, so the wave can move more freely.
- In shallow water, the bottom gets in the way. The moving water near the seabed rubs against the bottom and is squeezed into a thinner layer. That friction and confinement slow the motion, so the whole wave travels more slowly.

Another way to see it:

- A shallow-water wave is like a very long, thin "squash-and-stretch" of the whole water column from surface to bottom.
- Gravity is still the force trying to pull the surface back to flat, but now that entire column has to move together while scraping along the bottom.
- More water being dragged plus more bottom interaction means more resistance, hence a lower speed.

Key facts that match what you observe:

- In deeper water (still within the "shallow-water" regime for very long waves), there's more room below the wave to move with less interference, so waves go faster.
- In shallower water, the bottom interferes more strongly, so waves slow down.


This is why ocean waves often slow and grow taller as they approach a beach: they're entering shallower water, their speed drops, and the wave energy gets packed into a shorter distance, making the waves steeper.

GPT-5 這個回答也隱約見到 **bottom friction** 的影子。上述回答基本上也是錯的。

我們改變問題

Bottom friction attenuates a water wave, will it decrease the wave speed?

下午11:49 ✓

 GPT-5

Bottom friction vs speed:

- The slower speed in shallow water is not mainly due to frictional drag; it arises even in ideal, inviscid theory from the depth constraint and hydrostatic balance, giving $c = \sqrt{g h}$.
- Friction mainly attenuates amplitude; its effect on c is a small correction on top of the depth-controlled speed.

這回，GPT-5 算是答對了。

如讀者有興趣這課題，請閱讀筆者另一篇文章 [「淺水波為甚麼『深水跑得快，淺水跑得慢』？」](#)



作者：吳老師 (Chiu-King Ng)

<https://ngsir.netfirms.com>

<http://phy.hk>

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數

(2025-12-12 修訂)