

# 動量守恆與牛頓第三定律

高中物理課本多以牛頓第三定律去證明動量守恆 (conservation of momentum) 定律，方法如下：

假設一封閉系統，內有三個物體 A、B 和 C (再簡單一些，考慮二個物體亦可)。

此系統不受任何外力作用，所以，要考慮的力只是它們互相之間的作用力。

我們用  $\vec{F}_{AB}$  代表物體 A 作用於物體 B 的力，餘此類推。

應用牛頓第二定律於物體 A

$$\vec{F}_{BA} + \vec{F}_{CA} = \frac{d}{dt}(m_A \vec{v}_A) \dots\dots\dots(1)$$

應用牛頓第二定律於物體 B

$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CB} = \frac{d}{dt}(m_B \vec{v}_B) \dots\dots\dots(2)$$

應用牛頓第二定律於物體 C

$$\vec{F}_{BC} + \vec{F}_{AC} = \frac{d}{dt}(m_C \vec{v}_C) \dots\dots\dots(3)$$

公式 (1) + (2) + (3)

$$(\vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB}) + (\vec{F}_{AC} + \vec{F}_{CA}) + (\vec{F}_{BC} + \vec{F}_{CB}) = \frac{d}{dt}(m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B + m_C \vec{v}_C) \dots\dots(4)$$

根據牛頓第三定律，A 作用於 B 的力是與 B 作用於 A 的力的量值(magnitude) 相同、方向 (direction) 相反。所以，式(4)左邊的每一個括號內的兩個力抵消。 所以，

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B + m_C \vec{v}_C = \text{常矢量(constant vector)}$$

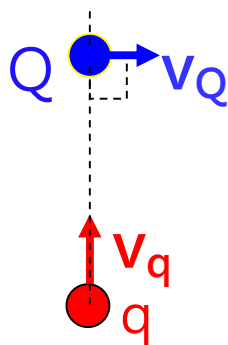
將討論擴展至 n 個物體，此為動量守恆定律。

但以上只證明若牛頓第三定律成立，動量守恆定律也必然成立。問題是牛頓第三定律真是牢不可破嗎？

答案：『不是』。

以下舉出一個著名的牛頓第三定律不成立例子。

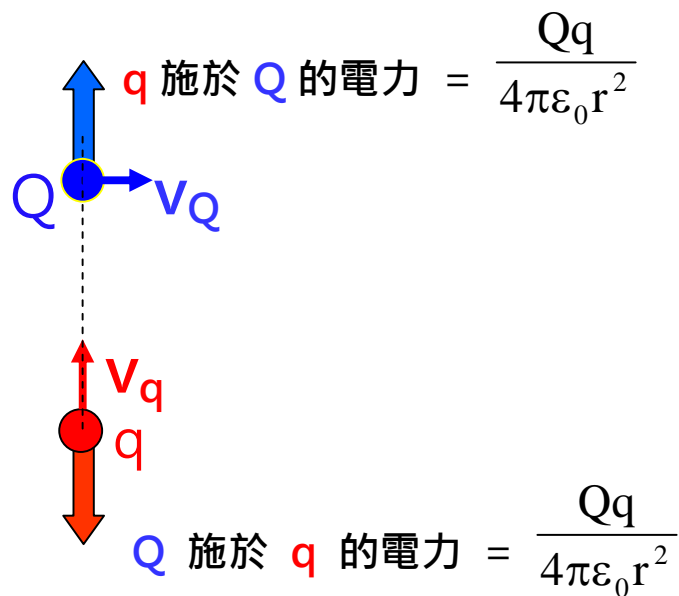
考慮右圖



圖中  $q$  和  $Q$  是兩粒如箭矢所示方向走動著的正電荷。假設它們的速度遠低於光速，所以不須考慮相對論效應。

$q$  與  $Q$  之間存在電磁相互作用 (EM interactions)。

首先，它們之間的庫倫電力符合作用力與反作用力的關係。



其次，我們要討論的它們之間的磁作用。

$Q$  作用於  $q$  的磁力

有！

但是，

$q$  作用於  $Q$  的磁力

沒有！

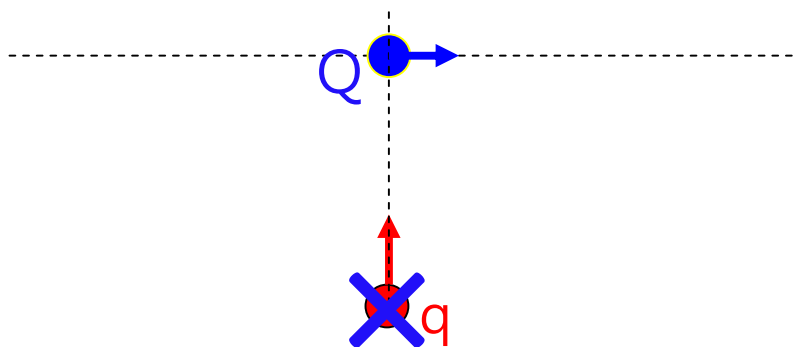
磁力 (magnetic force) 是如何發生？

譬如以  $Q$  為例，

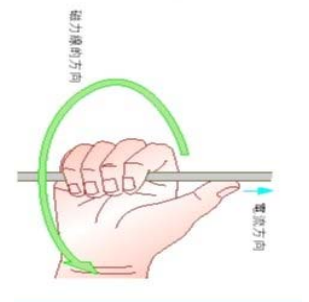
1.  $Q$  是移動中的電荷，它在它的周圍產生磁場。情況如通電流的電線周圍產生磁場 ( $B = \mu_0 I / 2\pi r$ )。
2.  $q$  是處於由  $Q$  產生的磁場中，所以  $q$  受到磁力作用。  
( $F = qvB$ )

✧  $Q$  作用於  $q$  的磁力 ✧

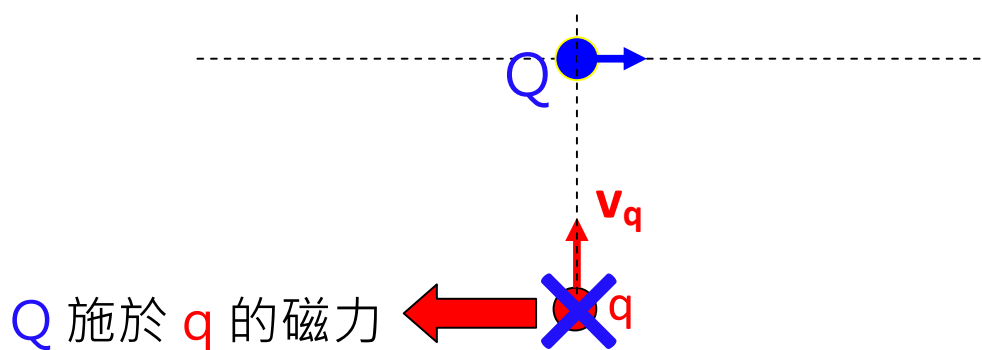
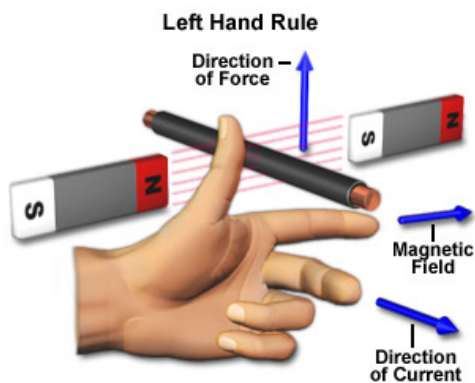
$Q$  在  $q$  的地方產生一垂直於圖平面向入的磁場 (想像如  $Q$  走動方向相同的電流所產生的磁場)。



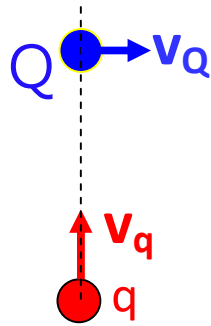
由  $Q$  產生的磁場



$q$  的電荷與  $Q$  在該處的磁場發生作用，令  $q$  受磁力作用。  
此磁力的方向是向左 (左手定則)。



✿  $q$  作用於  $Q$  的磁力 ✿

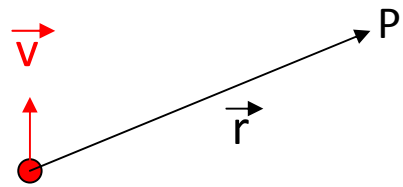


$q$  在  $Q$  的地方沒有產生磁場，所以  $q$  作用於  $Q$  的磁力是零。

為甚麼  $q$  在  $Q$  的地方沒有產生磁場？

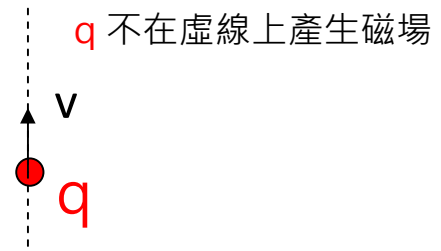
(1) 電荷  $q$  以  $v$  行走，在點  $P$  產生的磁場公式是

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$



(可參考 <http://www.youtube.com/watch?v=waTF7kjmmt8>)

若  $v$  與  $r$  是同方向的，那公式中的  $\vec{v} \times \vec{r}$  是零，所以  $B = 0$



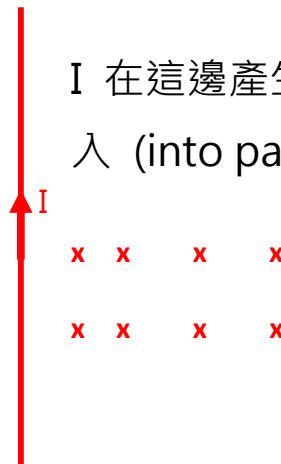
(2) 若你不熟悉以上公式，我們可作以下推論。

✚ 直電線通了電流  $I$  後，在其左右的磁場

$I$  在這邊產生的磁場是垂直紙面向出 (out of page)

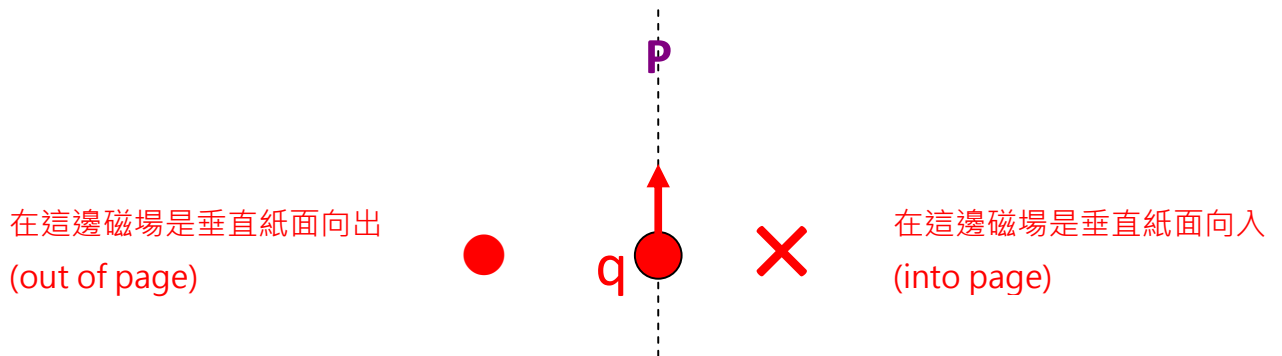


$I$  在這邊產生的磁場垂直紙面向入 (into page)





✚ 正電荷走動，就如一截小電流，所以很合理地推論在其左右的磁場為：



問題是在上圖的虛線上的點 P，在該處 B 的方向如何？

點 P 左方的磁場是向出；點 P 右方的磁場是向入。所以 P 是這兩個反方向的過渡點。所以在此處磁場只有兩個可能性：

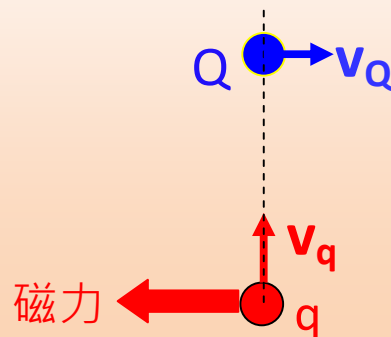
- (i) 無限大 (不定義)，情況一如  $\tan\theta$  從第一象限過渡到第二象限般，或
- (ii) 零，情況一如  $\tan\theta$  從第二象限過渡到第三象限般。

但 (i) 不合理，因為當點 P 離開電荷很遠時，電荷在該處不可能會產生無限大的影響。

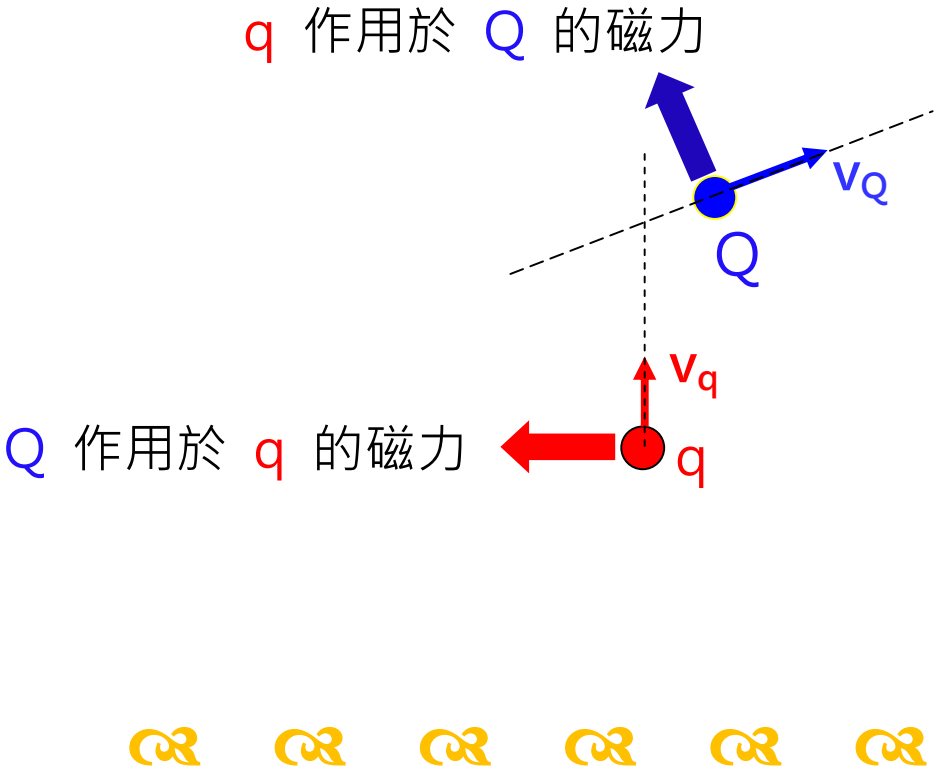
所以唯一的可能是在點 P， $B = 0$ 。

既然  $q$  在  $Q$  的地方不產生磁場，所以  $Q$  此刻不受磁力作用。

$Q$  作用於  $q$  的磁力(有)，但  
 $q$  作用於  $Q$  的磁力 (沒有)。  
所以 作用力並不等於反作用力。



多時，移動中電荷之間的電磁相互作用都是不符合牛頓第三定律。例如下圖中雙方施於對方的磁力的量值相同，但方向不是相反。



牛頓第三定律可以失效，但動量守恆不曾失效。

事實上，**動量守恆定律**是比牛頓第三定律更基本的基本定律。

在本文討論的例中，牛頓第三定律不成立；但動量仍然守恆，關鍵地方是除了電荷自己運動時所攜帶的動量外，「伴隨」它們而行的電磁場也攜帶動量。動量守恆是指整個系統的總動量。

Reference:

Introduction to Electrodynamics by David J. Griffiths

吳老師 (Chiu-king Ng)

電郵：[feedbackWZ@phy.hk](mailto:feedbackWZ@phy.hk) 其中 WZ 是 23 之後的質數



Online Physics Applets