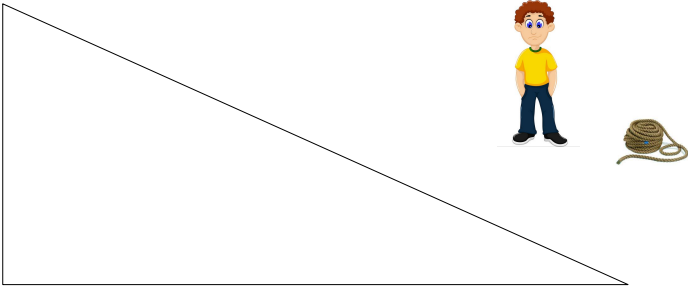
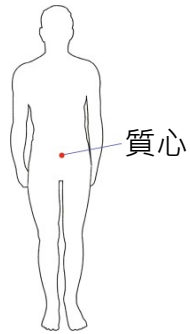


如何利用一捆繩子使人可以站立在一個完全平滑的斜坡上？請以力學平衡之條件作出解釋。

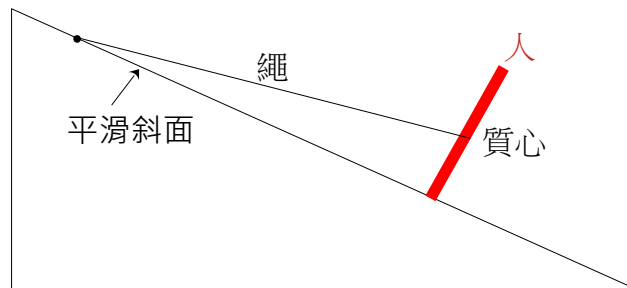


有這個簡單方法：

1. 把繩的一端繫在斜坡上一個較高位置。
2. 把繩的另一端繞過人的**重心 (或質心)** 位置的腹圍。

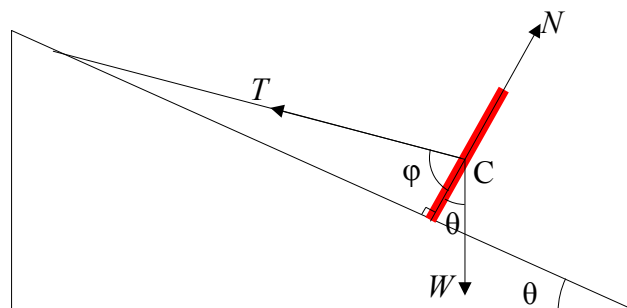


3. 這樣，人就可以垂直站立在那平滑的斜坡上。



力學平衡 (equilibrium) 條件：

1. 物體受的淨力為零。
2. 用任何一點計算的總力矩 (moment) 為零 (若物體受三個非平行的力作用，此三力的延線必然經過同一點)。



因為斜面平滑，斜面作用於人的只可以是垂直於斜面的法向力 (normal force)，不可能有摩擦。

條件 1：物體受的淨力為零。

---- 垂直人身軀方向： $T \sin \varphi = W \sin \theta$

$$\therefore T = \frac{W \sin \theta}{\sin \varphi} \dots\dots\dots (1)$$

---- 平行人身軀方向： $N = W \cos \theta + T \cos \varphi$   $\dots\dots\dots (2)$

把 (1) 代入 (2)，得  $N = W \left( \cos \theta + \frac{\sin \theta}{\tan \varphi} \right) \dots\dots\dots (3)$

用上式可以計算出繩的張力  $T$  和斜面的法向力  $N$ 。

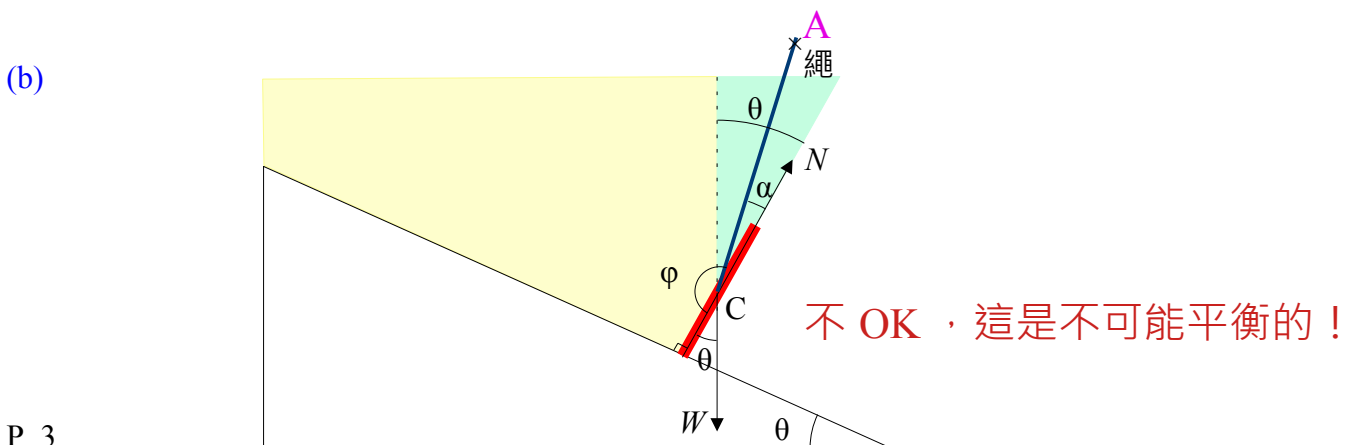
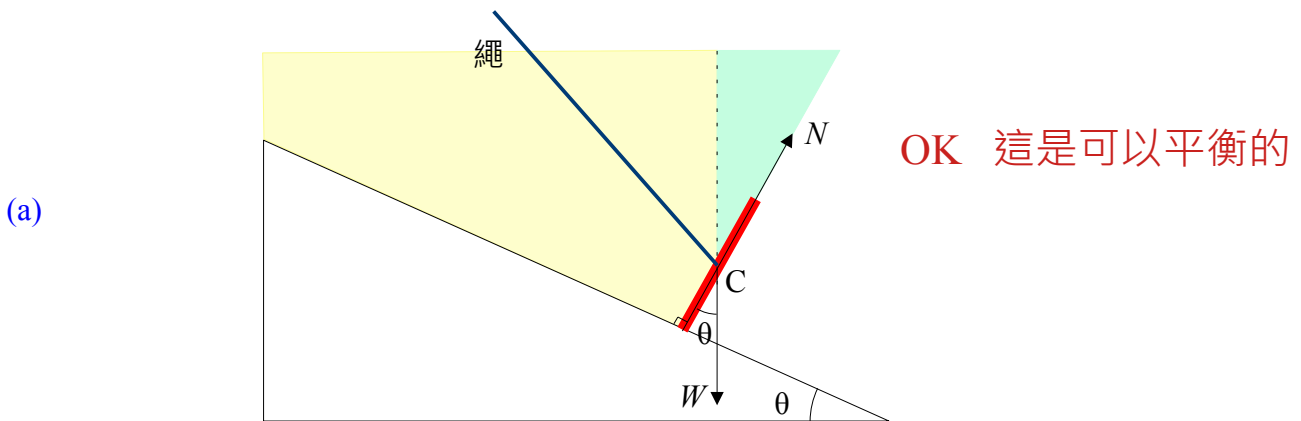
條件 2：用任何一點計算的總力矩（moment）為零。

$W$ ， $T$  和  $N$  這三個力都經過質心，所以用質心計算力矩，這三力的力矩均為零。

即是說，人受的淨力為零→沒有平移加速；相對質心，總力矩為零→沒有以質心為軸的轉動加速。人最初是靜止的，又沒有任何加速，這表示人可以繼續保持靜止（平衡）。

進一步探究：

問題一：若把原來繫在斜坡上的繩端繫在其他物件上，可以嗎？



如果繩是從圖的黃色區伸延出去，人是可平衡的；但如果是從綠色區伸延出去，那一定不可以平衡了。

上圖 (b) ,  $\varphi > 90^\circ$  及  $\varphi = 180^\circ - \alpha$  , 所以  $\tan \varphi = -\tan \alpha$

$$\text{式(3) 變成 } N = W \left( \cos \theta - \frac{\sin \theta}{\tan \alpha} \right)$$

$$\because 0^\circ < \alpha < \theta < 90^\circ ,$$

$$\therefore \tan \alpha < \tan \theta$$

$$\therefore \cos \theta < \frac{\sin \theta}{\tan \alpha}$$

亦即是  $N < 0$  。

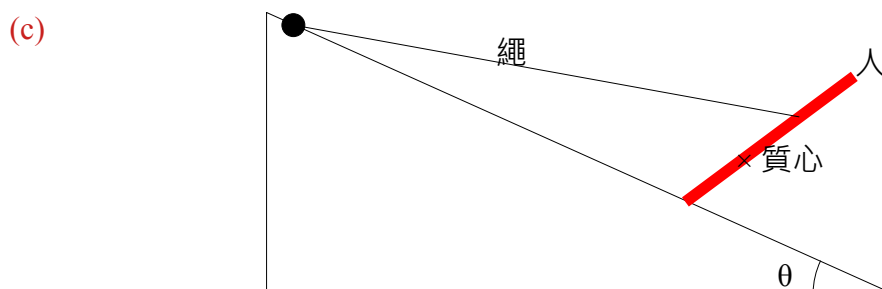
人只是站在斜面上， $N$  只可以是垂直路面向上 ( $N > 0$ ) 。 $N$  是不可能負的。

更簡單地看，在圖 (b) 繩上的點 A 計算力矩， $N$  和  $T$  的力矩均為逆時針，那即是不可以平衡了（相對質心，身體沒有轉動；但人的質心相對其他點轉動）。

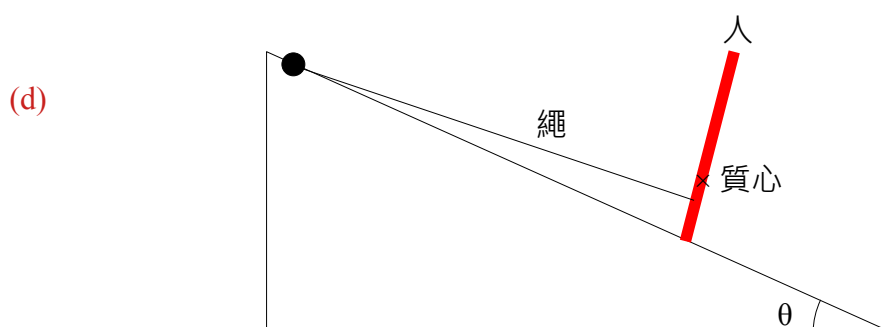


問題二：若把繩繫在人的其他地方（譬如用手拉着），可以嗎？

可以的，但人不再可以垂直於斜面。



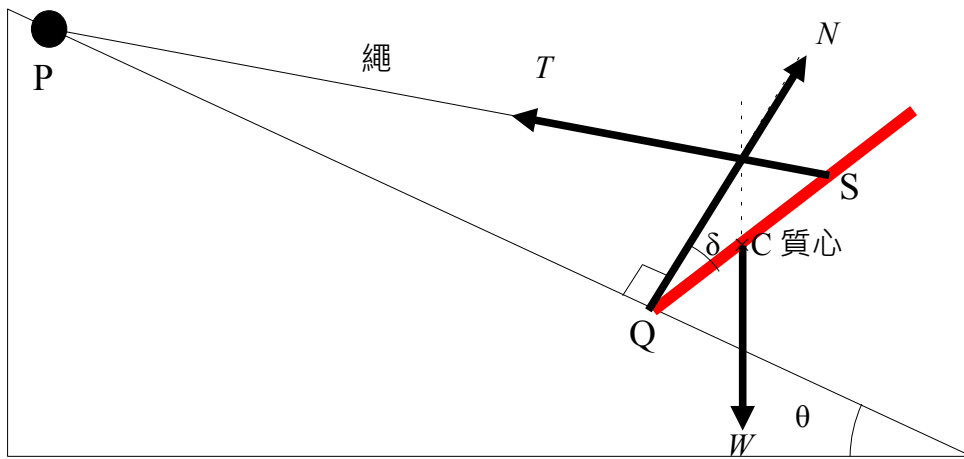
繩繫在質心較高位置，那時人要傾後一些（傾側的角度要不多不少）



繩繫在質心較低位置，那時人要傾前一些（傾側的角度要不多不少）

拿 (c) 情況作一些說明。

很重要的一點： $N$ ， $T$ 和 $W$ 三力的延線必經過同一點



究竟，那時人的身軀要向後傾側多少？

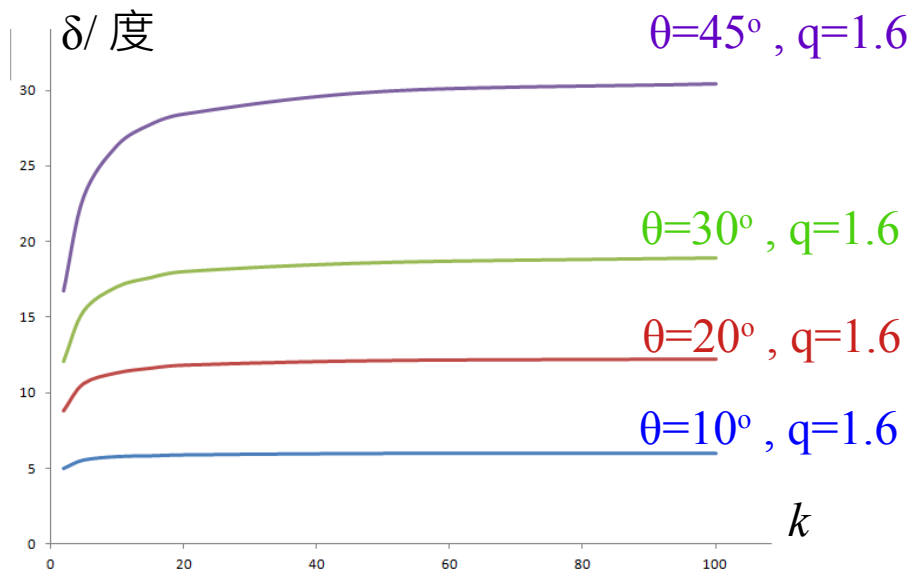
練習：

設上圖  $QC = 1$ ,  $PQ = k$  和  $QS = q$ ，請證明

$$\tan \delta = \left( \frac{kq}{k + q \sin \delta} - 1 \right) \tan \theta \quad \dots\dots\dots(4)$$

(1) 若繩繫在斜坡上很遠地方，即  $k \rightarrow \infty$ ，那  $\tan \delta = (q - 1) \tan \theta$

(2) 我們再以數值方法求式 (4) 的一些解答。





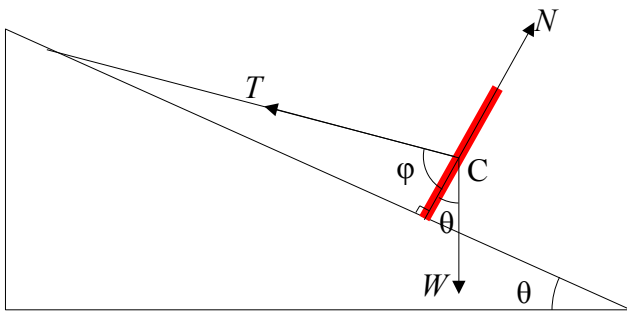
問題三：以上所討論的平衡，是真的現實可行嗎？

其實，上述的平衡是真的可以發生，但都是屬於「不穩定平衡」(unstable equilibrium)。



可以小心傾側左圖中的椅子，使它平衡不倒下。但角度只要有非常小的偏差，椅子就會迅速倒下，所以此平衡是一個「不穩定平衡」。

同樣，下圖的情況類似。



只要

(1) 那條繩要連接人的重心。

(2) 人站立垂直於斜面。

其中一條做得不完美，人就會倒下。

但現實的斜坡也不可能是完全平滑，路面上或多或少都有摩擦。這個路面摩擦是可以令人在少許偏離平衡時不致倒下。換言之，在摩擦存在之下，那「繩連接人的重心」和「站立垂直斜面」兩條件是有一定範圍鬆動的。



作者：吳老師 (Chiu-King Ng)

<https://ngsir.netfirms.com>

<http://phy.hk>

電郵：[feedbackWZ@phy.hk](mailto:feedbackWZ@phy.hk) 其中 WZ 是 23 之後的質數

