

淺水波為甚麼「深水跑得快，淺水跑得慢」？

(這裏，深水、淺水是指遠小於波長的不同水深)

English Version <http://phy.hk/PP/Addendum.pdf>

中學物理學習水波折射：在水波槽沉放一比水面低的方塊，水波在其上經過時波會走得慢一些。這個波速改變造成水波折射。學校正教材不太解釋為甚麼波速會這樣慢下來。

反之，一些非正教材給的理由是「水底摩擦」(bottom friction)。可惜，這解釋不正確，本文會花一些章節來解釋 (P.5)。

水波的一些物理基礎

(一) 波動只是波形由一處傳去別處，不涉及物質的傳遞，水波亦然。水波也不純是橫波或縱波。水波在水表面橫向傳播，水面和水下粒子會隨之作上下，同時也作平行於波傳播方向週期運動。

(1) 水波到達前，水面平坦。當水波抵達，部分水面凸起，形成波峰(crest)，部分水面凹陷，形成波谷(trough)。這些水面上升或下降，是水粒子上下運動造成。

(2) 在波峰之下，水容量比水面平坦時增多。反之，在波谷之下，水容量減少。這是需要水在水平方向一個流動才可造成。

即是說，水波對應的上下和左右運動是互相配合，缺一不可。兩者皆是簡諧運動，來來回回，沒有淨移動。

水波波形不是一個正弦波形 (sinusoidal waveform)。水波的典型波形是其波峰比波谷略「尖」，如下圖所示。



當水波振幅遠小於波長（稱為「弱波」weak wave），它的波形才可近似為正弦波。

(二) 我們研究的水波均可滿足以下假設：

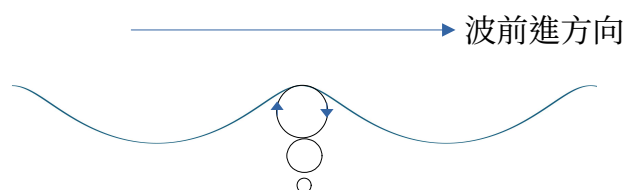
振幅 (A) 遠小於波長 (λ)；水為無黏性流體 (inviscid fluid)、不可壓縮 (incompressible) 和無旋的 (irrotational)。我們研究的水波是純由引力引起的表面波 (gravity-generated surface wave)。

(三) 水粒子作甚麼簡諧運動？

這個視乎水深與波長的比較。本文通以符號 d 代表水深。

(1) 當 $d \gg \lambda$ 。我們在大水池或大海洋所激起的水波屬於此例。

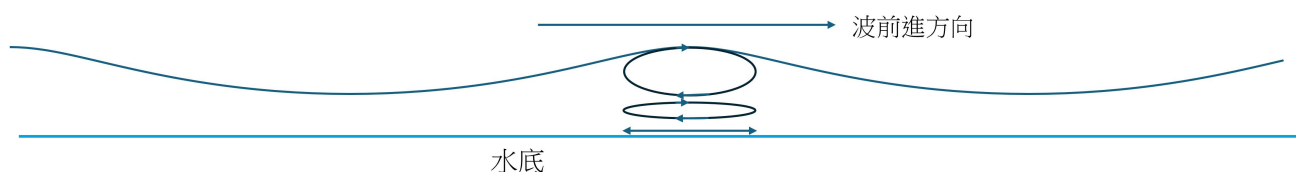
水面粒子隨波動作垂直圓周運動，半徑等於波振幅。水面下粒子也作圓周運動，惟半徑隨水下距離快速衰減。約莫離水面半個波長下的區域已平靜不受水面的波動影響。



(2) 當 $d \ll \lambda$ 。滿足這條件的稱為淺水波 (shallow wave)，也可稱為長波 (long wave)。盛極淺水水波槽 (ripple tank) 激起的水波、海嘯波 (tsunami) 都屬於此範疇。在這範疇，水面和水下所有粒子齊作橢圓運動 (elliptical motion)。

* 橢圓運動的水平部分的振幅與水下距離無關。即是這個水平振動在那個深度都沒分別。

* 橢圓運動的垂直部分的振幅與水下距離有關：從水面等於波動振幅開始，然後線性隨水深減少，至水底振幅為零。換言之，在水底粒子只作水平振動，沒有垂直運動（因為粒子不能穿越水底）。



(四) 水波波速公式

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kd)} \quad (1)$$

其中 c 是波速， $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ， g 是引力加速， d 是水深。

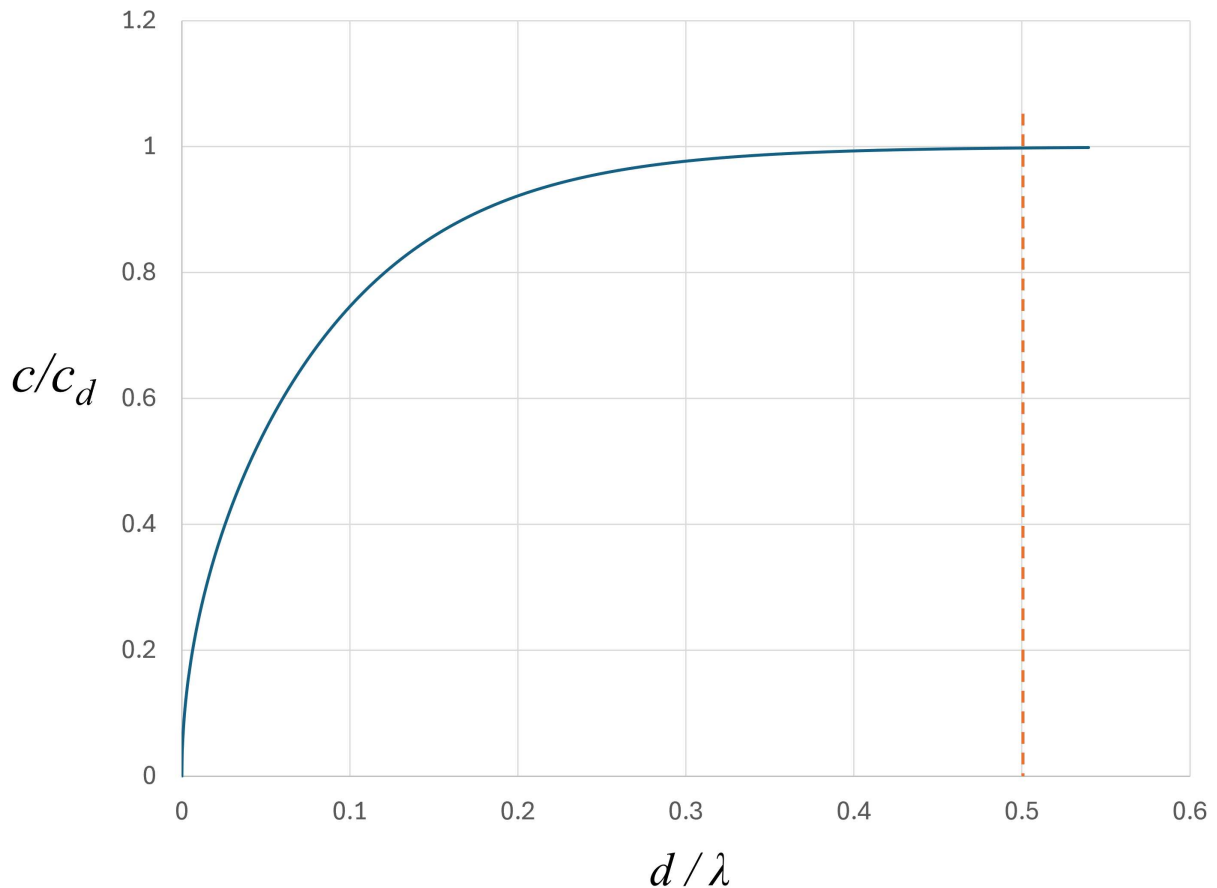
(1) 當 $d \gg \lambda$ $\therefore kd \gg 1$ $\therefore \tanh(kd) \approx 1$

$$\therefore c_d = \sqrt{\frac{g}{k}}, \text{ 其中 } c_d \text{ 為在深水區波速。} \quad (2)$$

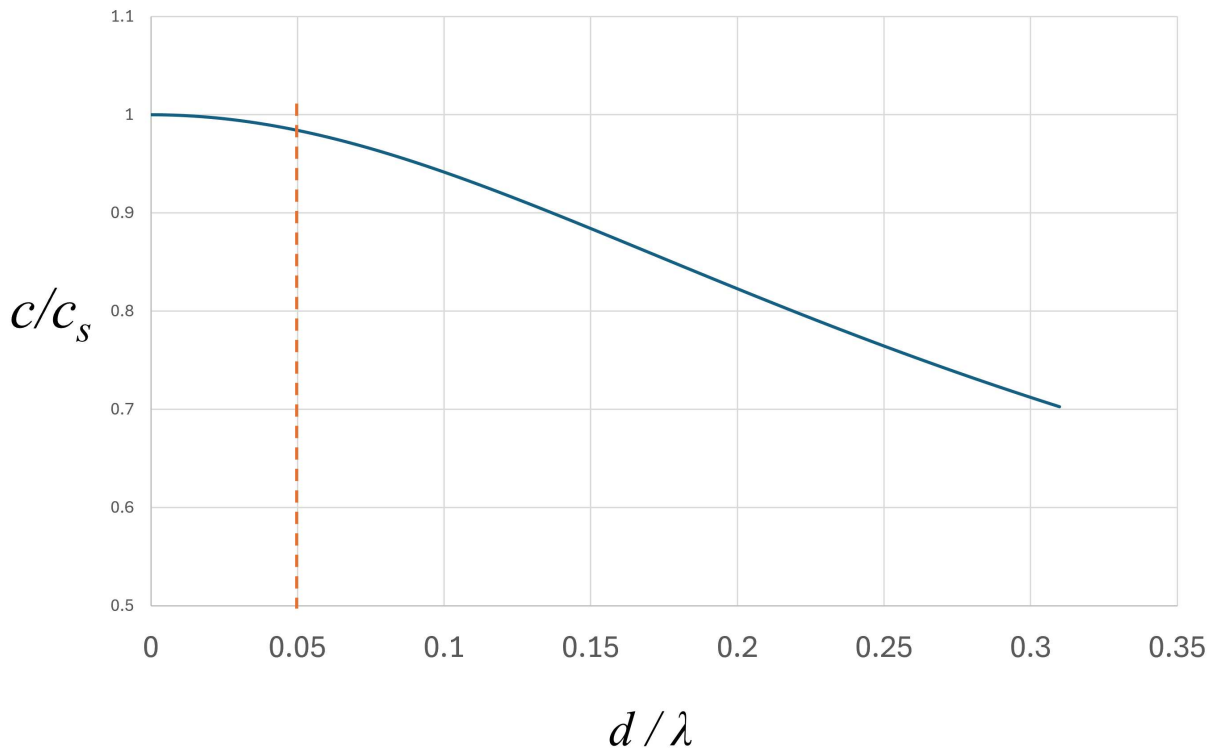
(2) 當 $d \ll \lambda$ $\therefore kd \ll 1$ $\therefore \tanh(kd) \approx kd$

$$\therefore c_s = \sqrt{gd}, \text{ 其中 } c_s \text{ 為在淺水區波速。} \quad (3)$$

圖一：在固定波長下，波速比 c/c_d 隨水深 d/λ 變化：



圖二：在固定波長下，波速比 c/c_s 隨水深 d/λ 變化：



從圖一和圖二，可概括出三點：

(1) 水波速隨水深增加。大概水深為波長的一半或更深 ($d/\lambda > 0.5$)，公式 (2) 已很適用。所以，「深水區」不是真的要求很深水。「水深為波長的一半」已算是了。那時，水波速與水深無關。公式 (2)， $c = \sqrt{\frac{g}{k}}$ 適用。

(2) 淺水波 $d \ll \lambda$ 的條件，實在說，大概就是 $d/\lambda < 0.05$ ，即是水深短於波長的 $1/20$ 。那時，公式 (3)， $c = \sqrt{gd}$ 適用。

(3) 儘管超出了 “ $d/\lambda < 0.05$ ” 範圍， $c = \sqrt{gd}$ 不那麼適用。但只要是 “ $d/\lambda < 0.5$ ” 定性地說「水波速隨水深增加」仍然是對的。

第 (1) 點之所以如此，因為表面水波最多只會引發水面下大概半個波長水深的粒子運動。這個深度已足夠把水在波峰與波谷之間來回運輸。水再深也毫不影響波的傳播。

第 (2)、(3) 點是本文要問的問題。我們集中討論「淺水波」，因為在這領域，我們有簡單公式 ($c = \sqrt{gd}$) 可用和思考，那自然會增添說服力和解釋上的方便。

本文說的「深水區」和「淺水區」都是指在條件 $d \ll \lambda$ 下的「淺水中的相對深水區」和「淺水中的相對淺水區」。

「水底摩擦」不是「深水快，淺水慢」的正確解釋

(A) 水底摩擦的方向

- (1) 先前已說，淺水波水底粒子是緊貼水底平面作前後週期運動。如果水底存在摩擦，那摩擦的方向一半時間是相反波的前進方向，但也有一半時間是順着波的前進方向。

明顯地，圖像「淺水波受水底摩擦的作用正如一方塊在一粗糙面移動時受到摩擦阻礙而減慢」是錯的。

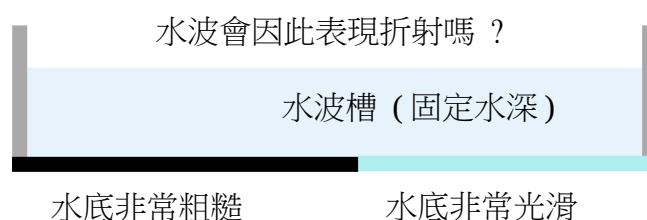
(B) 儘管「水底摩擦」對波速可能有影響，但它一定不是「深水快，淺水慢」的主因

- (1) 公式 (3) (或公式 (1)) 已充分反映波速與水深的關係，有無數的實驗基礎。但公式中並沒有「水底摩擦」這一參數。即是說，解釋「深水快，淺水慢」基本不依賴「水底摩擦」。反過來說，若說「海底摩擦」就是原因，那應該可以從「海底摩擦」出發而推導出 $c = \sqrt{gd}$ 。但可以做到嗎？

- (2) 「水底摩擦」或會把水波變慢，但必不會把水波變快。水波從深水區進入淺水區，再由淺水區重入深水區。波速由快變慢，再由慢變快。整個過程，「水底摩擦」不能自圓其說。

(C) 儘管「水底摩擦」對波速可能有影響，但影響必很微弱

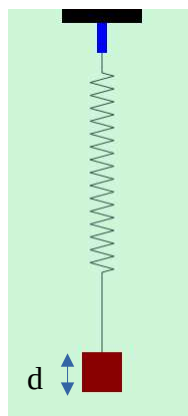
- (1) 若「水底摩擦」對波速有不可忽略的影響，那我們可以在固定水深的水波槽以水底不同粗糙程度來劃分不同區域，水波進出這些區域已可以表現折射現象。但我們從沒見過/聽過這樣的實驗，這已間接說明無論水底是平滑或粗糙，波速都不會有明顯變化。



(2) 若果「水底摩擦」真會影響波速，唯一可能它只是一個微小的修正項 (correction term)。

(D) 一個類比

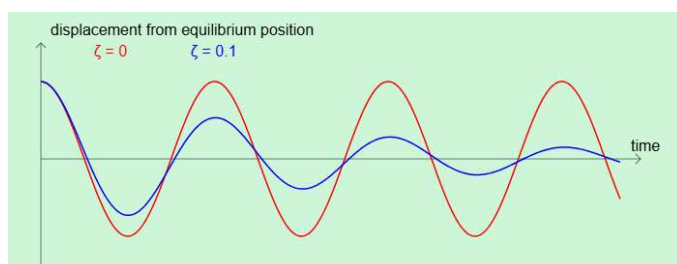
一彈簧垂直吊起一邊長為 d 的實心立方體。把立方體拉下少許然後釋放，立方體作簡諧運動 (simple harmonic motion)。



問：當 d 增大，振動頻率為甚麼會下降？

答：因為當 d 增大，方塊的橫截面積增大，這樣方塊運動時受的空氣阻力增加，因而減慢方塊的運動，故頻率下降。

這答案靠譜嗎？沒錯啊，阻尼簡諧運動 (damped shm) 因阻尼增加頻率微微下降。



紅線：無空氣阻力 藍線：有空氣阻力。週期比藍線的確略長

但是，譬如若 d 變成 $2d$ ，那 m 變成 $8m$ ，那 ω 變成 0.35ω 。「空氣阻力」解釋不了 ω 如何可以變成 0.35ω 。

「空氣阻力」會造成輕微「頻率下降」，但不是造成「頻率下降」的基本原因。回答問題應該使用公式 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 。

類似地，

「水底摩擦」或會真的造成輕微「波速變慢」，但不是造成「波速變慢」的基本原因。回答問題使用的公式是 $c = \sqrt{gd}$ 。

根據流體力學理論，水底摩擦 bottom friction 對水波的主要影響是令其振幅衰減 (amplitude attenuation), 其對波速的影響非常輕微，一般情況下可忽略。

既然不是「水底摩擦」，那「深水快，淺水慢」的真正（主要）原因是甚麼？

質心 — 單擺模型

UC Berkeley 物理學家 Frank S Crawford 在 1987 American Journal of Physics 發表一篇很短的文章 “A simple model for water-wave dispersion relations” (Am. J. Phys. 55, 171–172 (1987))。文章利用水駐波 (water standing wave) 的質心 (center of mass) 運動來推導公式 $c = \sqrt{gd}$ 。不單止如此，筆者也發現這模型正好提供「深水快，淺水慢」的一個很容易明白的定性解釋。以下我們用一個非數學的途徑來介紹此模型。

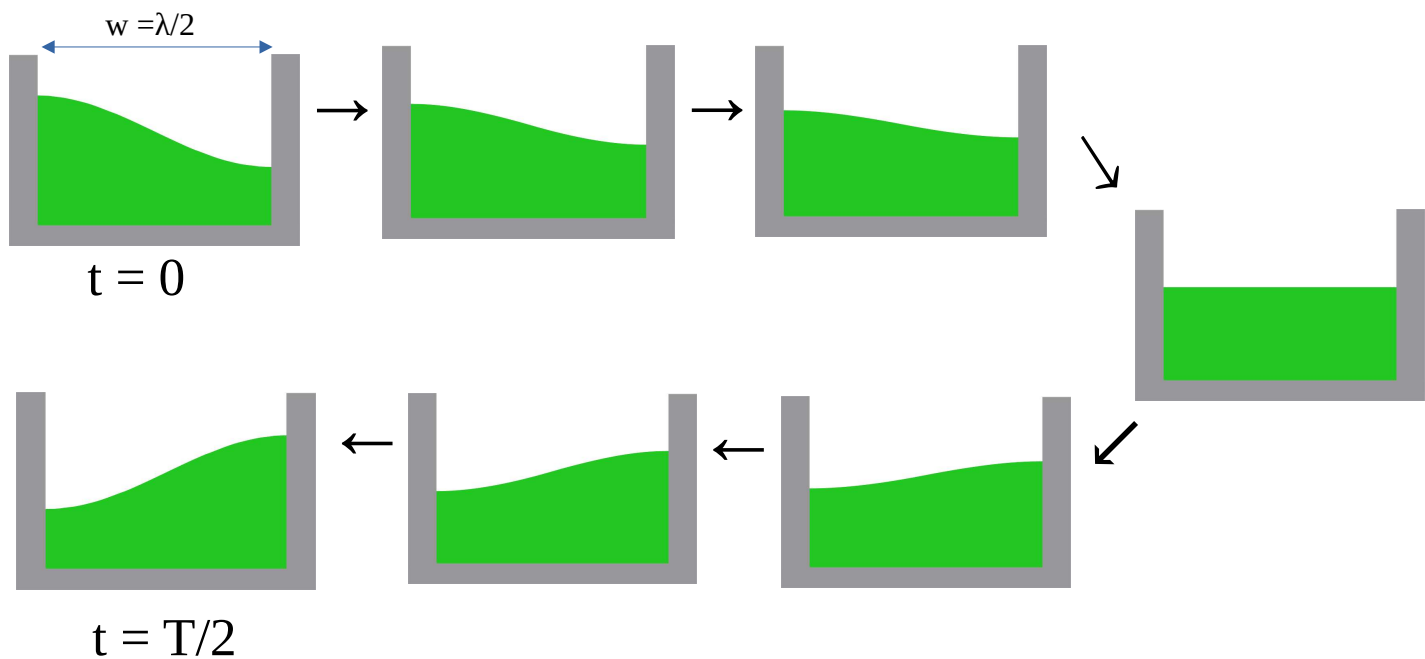
考慮在一個盛着水的長方形水缸產生水駐波 (water standing wave)，如下圖所示。

(1) 波長 λ 為水缸闊度 w 的兩倍。 $\lambda=2w$ 。此亦即是駐波的基模 (fundamental mode)。

(2) 忽略水的摩擦與缸邊的摩擦，故駐波左、右兩端為波腹 (antinode)。

(3) 水波速 $c = \lambda/T$ ，其中 T 為週期 (period)。

(4) 日常生活，大家拿着一缸水走，水在缸中上下晃蕩 (slosh)，就是這個振動。



我們探索兩問題：

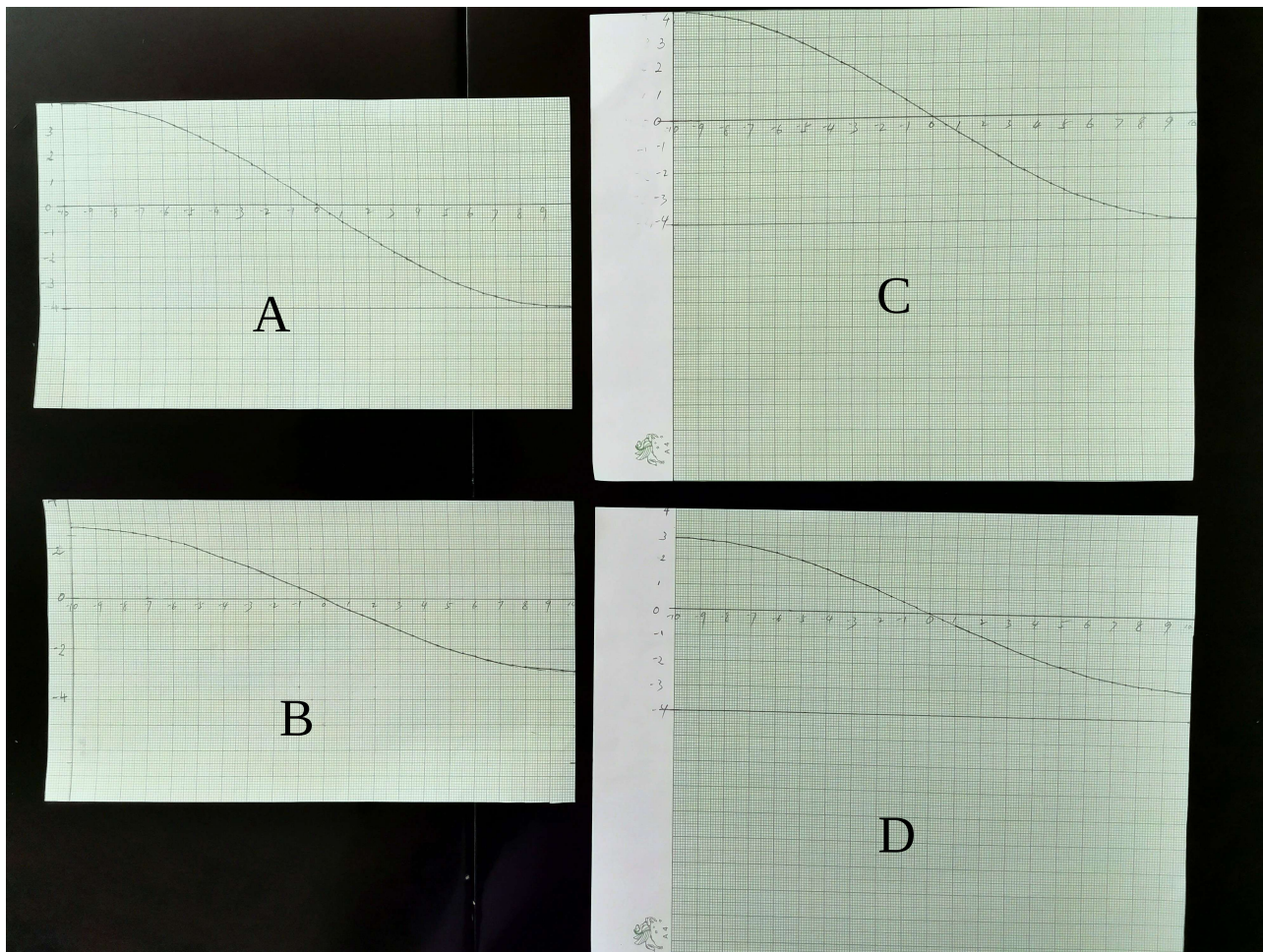
(1) 隨着上圖水駐波水面的變化，水體 (water body) 的質心會如何運動？

(2) 如果水深增加，那上述水體質心的運動會如何變化？

分析前，大家不妨先自行猜想結果。

我們不是用數學去找答案，而是用一個「課堂活動」形式來找答案。這就是以垂線法來找質心（重心）。

步驟 1：把水駐波的波形畫在格仔紙（座標紙，graph paper）上。也可用 printer 打印。

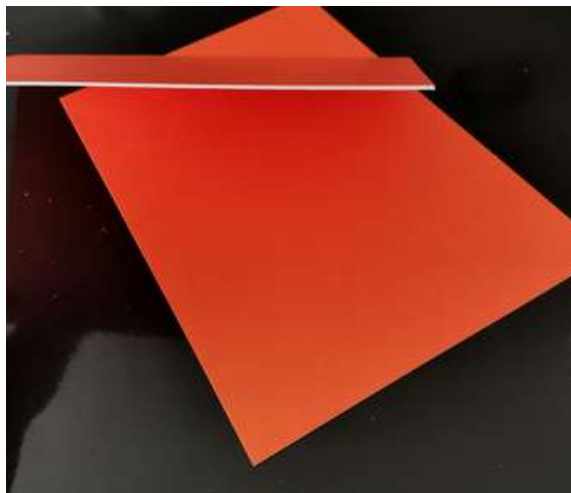


曲線方程 $y = A\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right]\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}\right)\right]$ 。我們取波長 $\lambda = 40$ 單位（以格仔紙一大格為一單位，即 1cm），振幅 $A = 4$ 單位。

淺水區 $d = 8$ 單位：圖 A ($t = 0$)，圖 B ($t = T/8$)

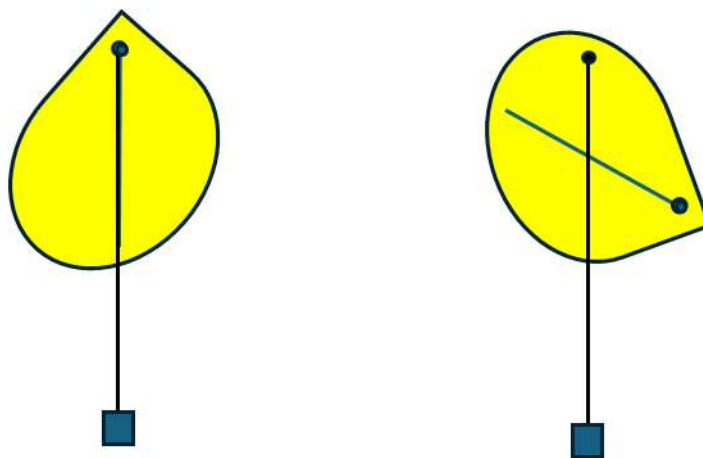
深水區 $d = 14$ 單位：圖 C ($t = 0$)，圖 D ($t = T/8$)

步驟 2: 把格子紙貼在優質的厚硬咭紙上



步驟 3: 用剪刀把格子紙上的水波波形 (連厚咭紙) 剪下。

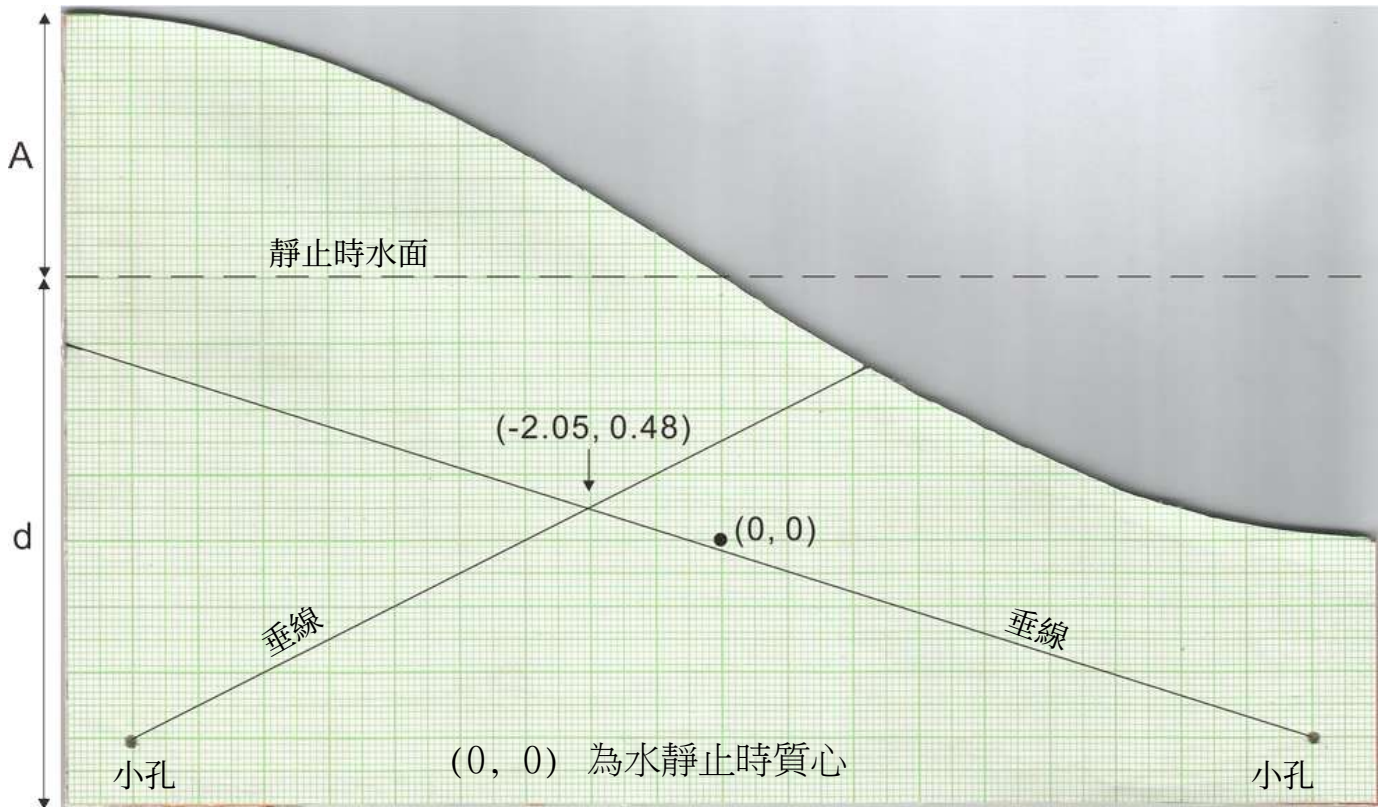
步驟 4: 在每塊厚咭紙 (連格子紙) 下兩角鑽兩小孔。然後利用「垂線法」求每一塊厚咭紙 (連格子紙) 的質心 (重心)。



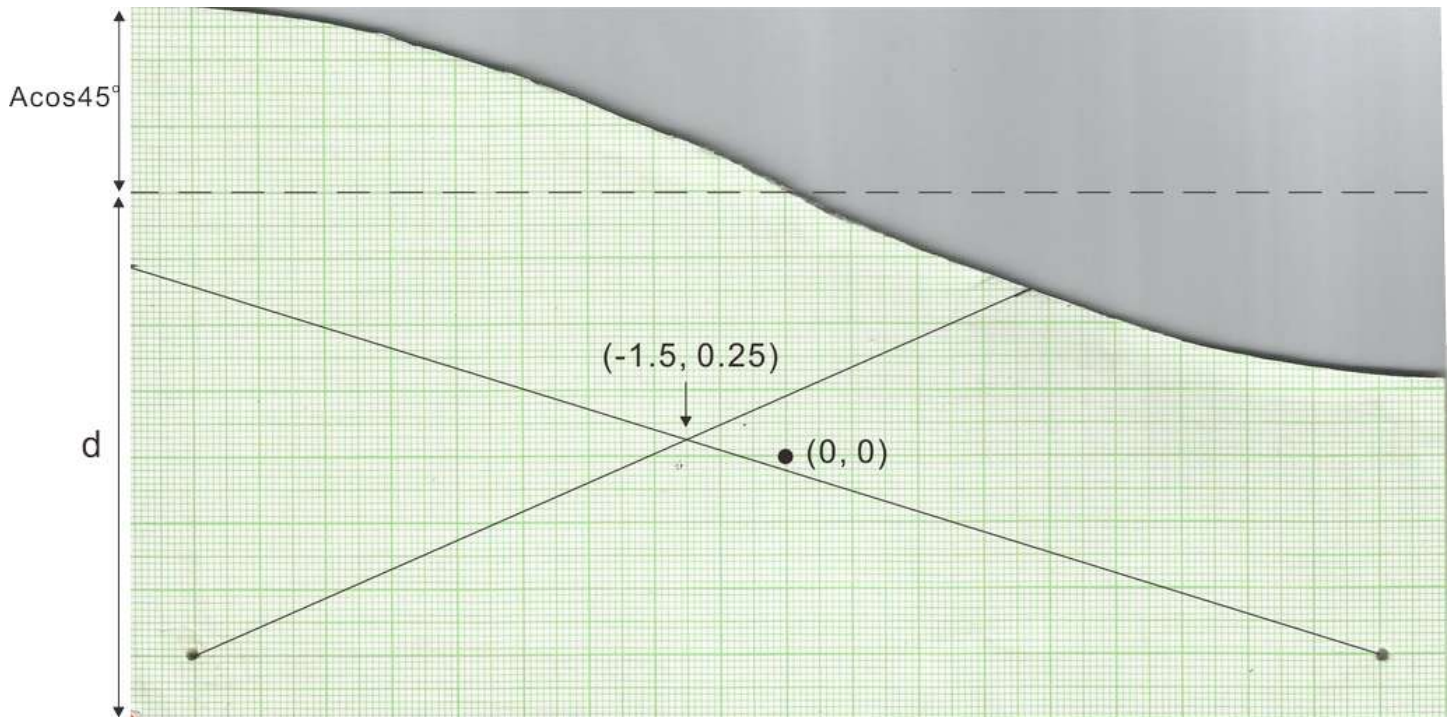
在 Youtube 以 “Plumbline finding center of gravity” 可找到很多影片介紹。

實驗結果：

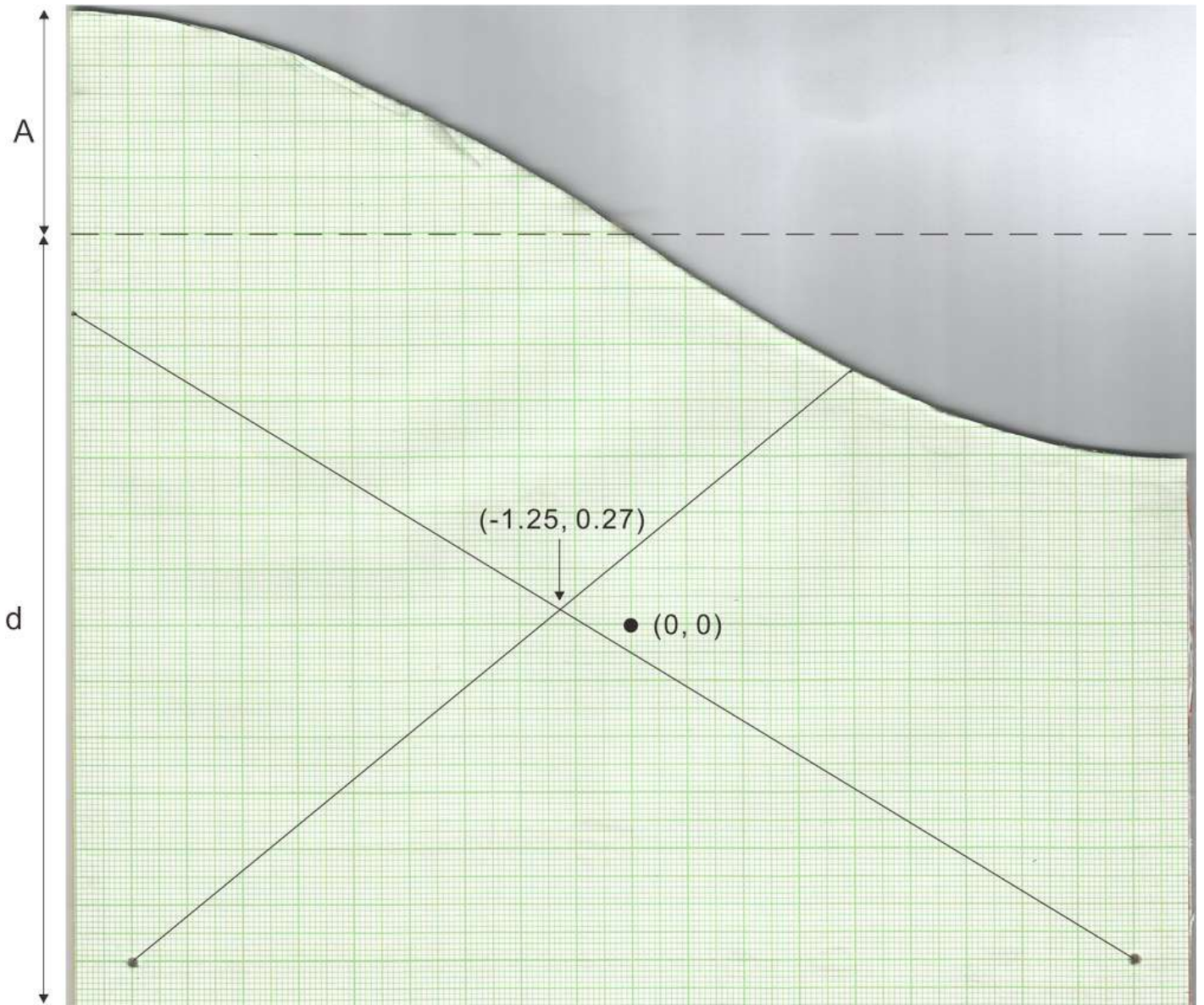
淺水區 ($t = 0$)



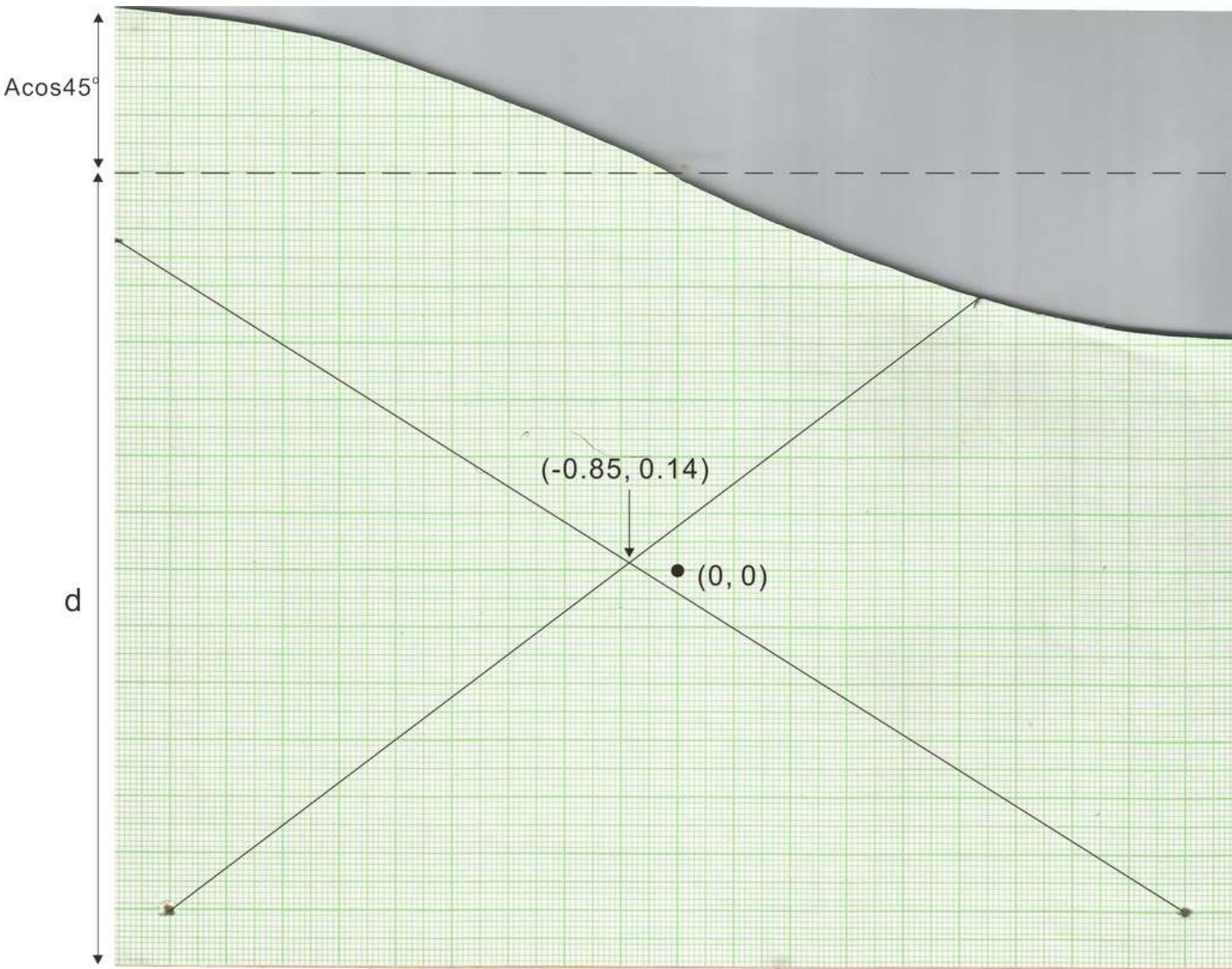
淺水區 ($t = T/8$) 左端 $y = A \cos 45^\circ$



深水區 (t = 0)



深水區 ($t = T/8$) 左端 $y = A \cos 45^\circ$



實驗數據：

第一組（淺水區）

波長 $\lambda = 40$ 單位（以格仔紙一大格為一單位，即 1cm）

振幅 $A = 4$ 單位

水深入 $d = 8$ 單位

質心軌跡（雖然我們只用了兩個時刻的圖形，但實際我們有 5 點數據）

x_{CM}	-2.05	-1.5	0	1.5	2.05
y_{CM}	0.48	0.25	0	0.25	0.48

第二組（深水區）

波長 $\lambda = 40$ 單位（以格仔紙一大格為一單位，即 1cm）

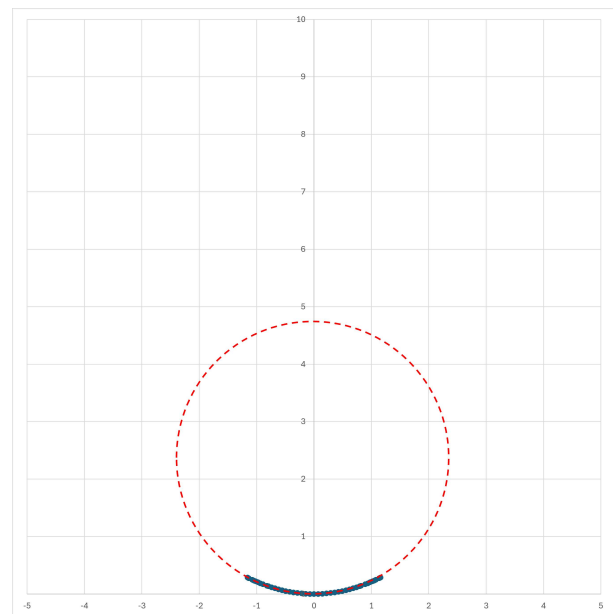
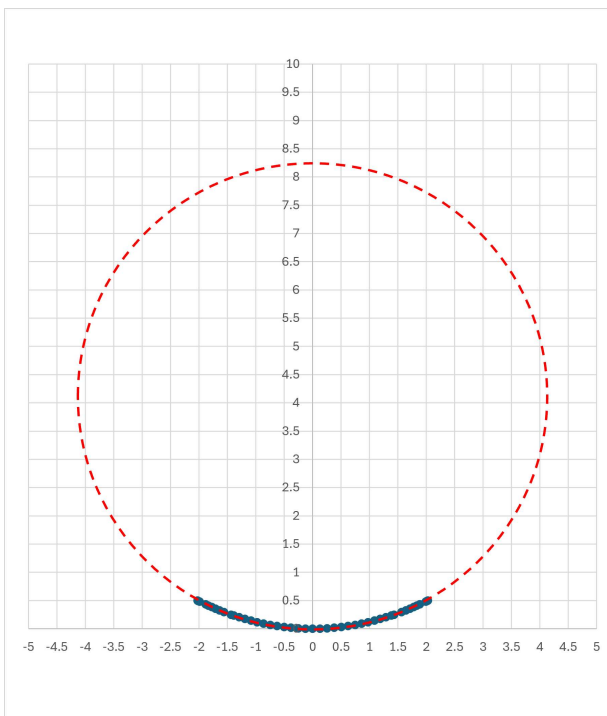
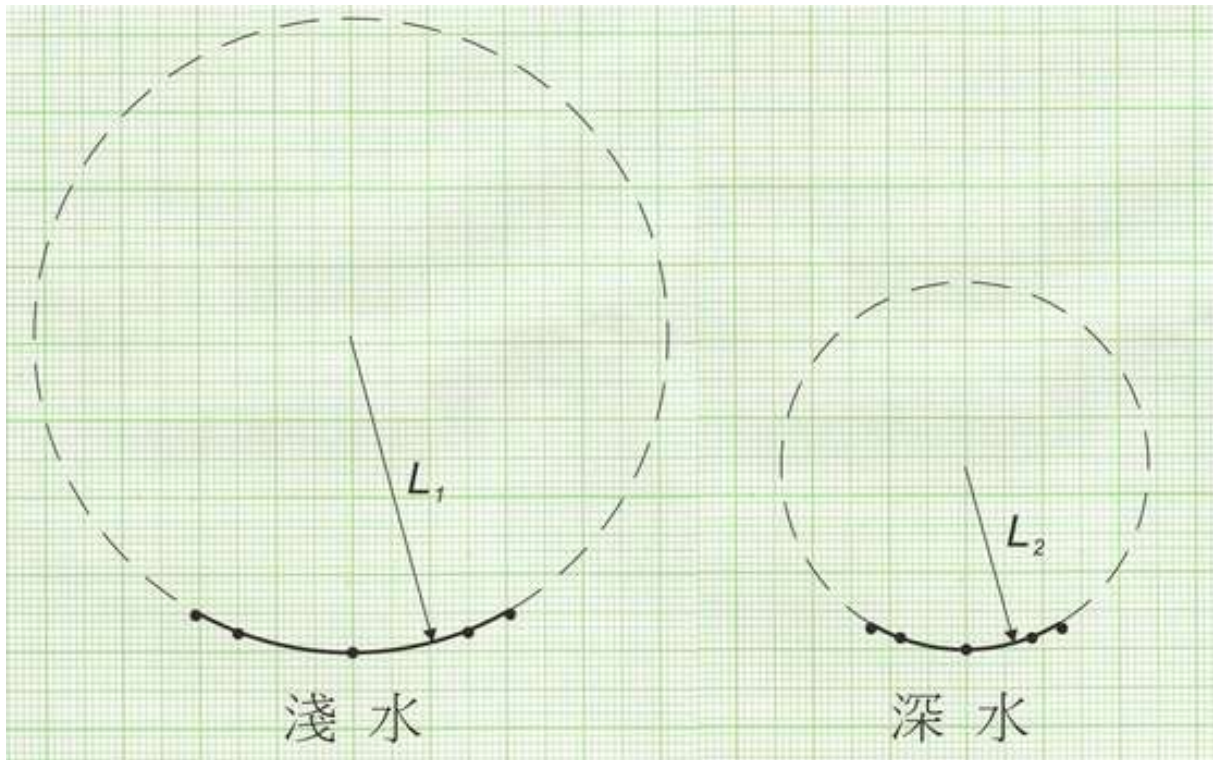
振幅 $A = 4$ 單位

水深入 $d = 14$ 單位

質心軌跡

x_{CM}	-1.25	-0.85	0	0.85	1.25
y_{CM}	0.27	0.14	0	0.14	0.27

把以上數據點畫成曲線，那結果就很明顯了。



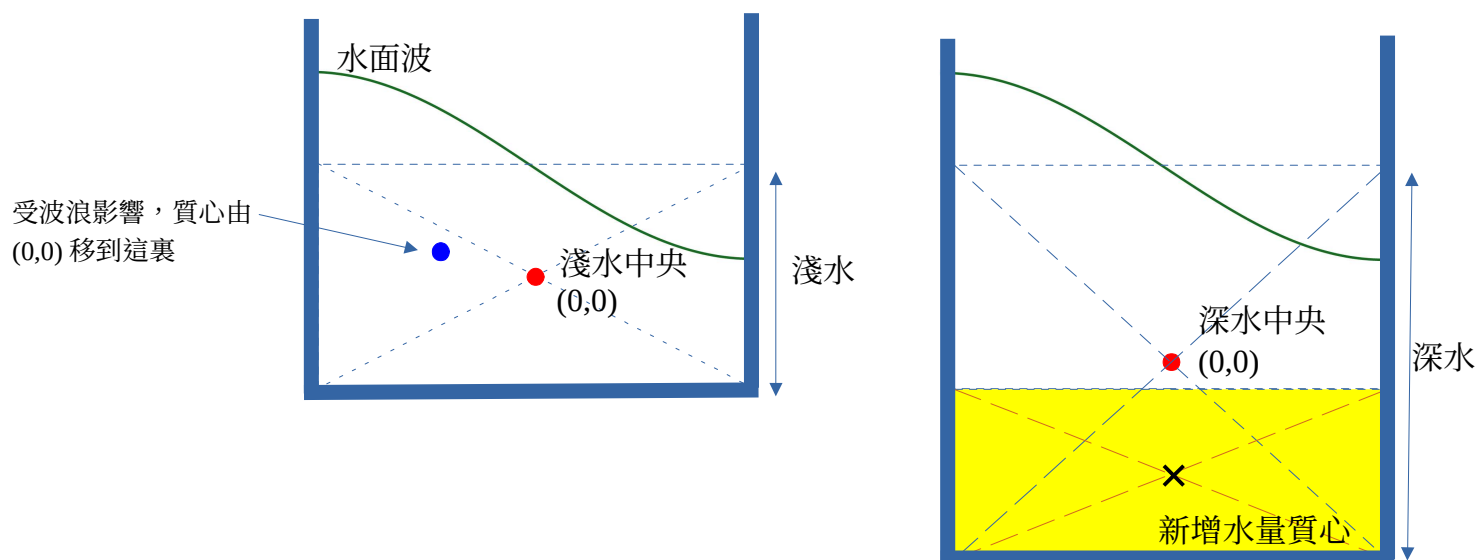
上圖是用試算表計算 CM 並繪製的圖。左邊是淺水區，右邊是深水區。波長、水深等參數和先前相同。

結果詮釋

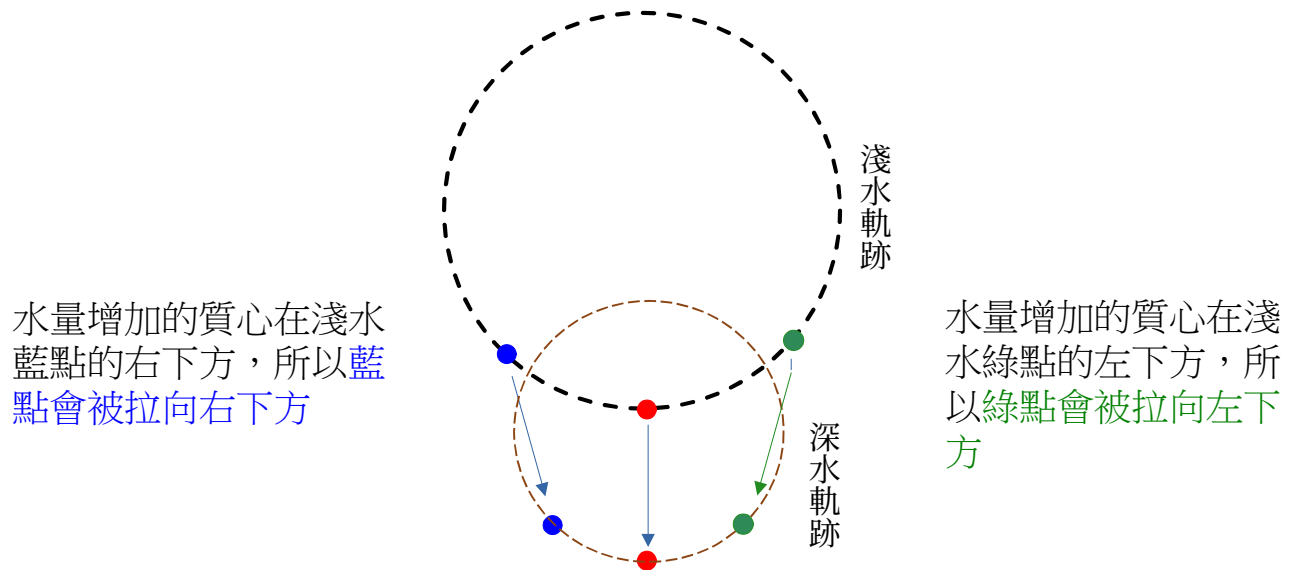
- (1) 水駐波質心進行的是圓周運動（最低部分）。因為水波波形的變化是正弦變化 $\cos(\omega t)$ ，所以質心在圓周上位置的變化也是 $\cos(\omega t)$ 。換言之，質心進行的就是一個簡諧運動 (simple harmonic motion)。
- (2) 進一步說，這裏我們研究的水波是由引力引起，所以這個簡諧運動就是 單擺運動 (simple pendulum)。
- (3) 單擺運動週期是 $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ 。週期 (period) 不與振幅有關，只與引力加速 (g) 和單擺長度 L 有關。
- (4) 上圖可見，深水區質心單擺運動的單擺長度 (L_2) 比淺水區的 (L_1) 短，即是擺動稍快，週期短一些。波速 $c = \frac{\lambda}{T}$ ，相同波長，週期較短，表示波速較快。
- (5) 若畫圖準確，不難證明軌跡圓的半徑 L 反比於水深 d 。這表示波速 $c \propto \sqrt{d}$ 。

物理解釋

1. 水越深，水下質量越大，所以水面波浪造成的影響會不如淺水般重要。
即是，水越深，波浪影響越減退。
2. 當完全沒有波浪，水粒子不會運動。當波浪影響減退，粒子偏移減小。
3. 所以在深水區，水下粒子只會靠近它們的平衡點作小幅度運動（假設相同波振幅下的不同水深）。水體質心也因而靠近它的平衡點(中央原點)作小幅度擺動。
4. 同時，深水區的中央原點也因為水加深而下降。
5. 最終擺動的曲率半徑減小。參看下圖



原來淺水的藍點也會受增加的水量（黃色部分）影響。那黃色部分的質心在淺水藍點的右下方，所以黃色部分的加入會把那藍點 拉向下和向右。



× 新增水量質心

簡單而言，是水面的起伏和下方的水量在「互拼影響力」（前者是「攪動」，後者是「穩定」）。當下方水量增大，水體質心（粒子的平均運動）只能蜷縮在以原點為中心小幅度擺動。重要結果是擺動的曲率半徑減小。

單擺週期與振幅無關

在更曲的軌道上，重力 (gravity) 可更有效製造擺動。週期縮短。波速增加。

討 論

(1) 這個「質心 — 單擺」是一個 **宏觀解釋**，也是一個以粒子的 **平均運動** (因為我們是看物體的 **CM**) 來作解釋。我們不是着眼看個別粒子運動，而是看它們的集體平均表現。這個宏觀解釋的好處是 **可以不須要知道個別粒子的實際運動**。只需要知道水面形狀是一條 **cosine curve** 就可以了。

(2) 這一點非常重要：**這個「質心 — 單擺」模型不適用在深水區。**

以「質心 — 單擺」模型得出質心的運動，亦即是整個系統的平均運動。這個質心運動必然正確，幾深水也不妨礙我們計算出水體的平均運動；水越深，單擺長度越短，週期越短。但**問題是，它描述的是否就是水面上的波動？**我們舉以下類比來說明。

在一條多線行車的高速公路。如果各線道上車輛都是風馳電掣，朝同一方向去。我們計算公路上所有行車線上所有車的平均速度來反映當時馬路的交通情況。這個平均運動有意思嗎？肯定非常有。

但如果這高速公路只有最外一線可以暢通，其他線道因為意外車全部堵塞停下。這時我們計算所有行車線上所有車的平均車速，這個「平均車速」還意思嗎？應該還有，但起碼絕不能反映最外那正常行車線道的現況。而這暢通線道就是水面的波動，是我們最想描述的。

「淺水波」勝在水淺，水下粒子都是跟從着水波一齊晃蕩。情況一如各線道上車輛都行走着。那時，水體的平均運動亦適用於水面的波動。

如前所述，「水深為波長的一半」已算是「深水波」，那時水面下的運動只限於近水面大概波長一半的深度內。那波長一半以下的水已歸平靜不受水面波影響。這時我們**計算一個由水面至很深水的平均運動就不能反映水面的波動。**

所以說，這個「質心 — 單擺」模型完全適用在淺水區 ($d < \lambda/20$)，及定性地適用 $d < \lambda/2$ 。若 $d > \lambda/2$ ，我們也只可當 $d = \lambda/2$ 。(這個「 $\lambda/2$ 」只是一個大概的分界)

(3) 這個「質心 — 單擺」模型完全適用在淺水區 ($d < \lambda/20$)，但我們製圖以垂線法求質心，若真滿足“ $d < \lambda/20$ ”，CM 擺動的弧相當平，即是 CM 的座標不易求得準確。本文採用的兩組水深分別是 $d = \lambda/5$ 和 $d = \lambda/3$ 。無論如何，我們求得的結果，繼而引伸的概念正確沒問題。

(4) 除了「水底摩擦」，另一個比較流行的解釋是「深水波速較快，因為水量增加：水的重量增加（力增加），結果是水容易被拉動，造成波速加快」。這解釋明顯也是錯的，因為當水量增加，水的重量增加，但同時水的慣性也同步增加。這結果單擺已早早告訴了我們：單擺與質量 m 無關。

答案不是「水底摩擦」，不是「水重量」，也不是「水慣性」。那究竟是甚麼？「質心 — 單擺」圖像給了一個答案（或不是唯一的表述）：它是一個 **幾何原因**。質心在一條較平或較曲的軌跡上，使垂直向下的 g 較困難或容易去製造擺動，那直接影響波動的傳播。

(5) 以上分析利用了水駐波，那這個「質心 — 單擺」解釋適用於水行波 (travelling wave) 嗎？簡單回答：適用。在水行波，這個「單擺」仍然存在，但不如水駐波那麼明顯。

(6) 先前我們假設了波的振幅在淺水區和深水區相同，這只是為了方便（之後解釋）而已。其實在 P.15 畫圖得到的質心單擺半徑 L 與振幅無關。大家可以製造更多圖形以實驗證明之。但是 L 是與波長 λ 有關。波速 $c = \lambda / T$ ，我們假設了 λ 相同，那 c 的變化全反映在 T 的變化中。

(7) 除了這個「質心—單擺」理論，還存在其他的解釋。「水管模型」是其中一個：以粒子的運動為基礎研究水如何從凸起的波峰，通過水底以上的通道運輸到凹下的波谷。從而得出波速與水深的關係。水面以下水底以上的通道如一條水管。淺(深)水區就如一條窄(粗)水管。

(8) 筆者深信本文倡議的「質心 — 單擺」解釋正確。它是否一個很好的解釋，那就見仁見智了。起碼，筆者深覺得此解釋很適合中學同學，因為同學 不太需要 掌握水下粒子的運動形態（見 P.1-4），只要知道水面形狀是一條 cosine curve 就足夠了。通過動手做實驗求答案，可以完全不涉及水波理論。老師作解釋也很容易。

或說：「中學同學也不一定懂甚麼是單擺運動呀？」 是的。但同學不要求很深入認識單擺運動。老師做一簡單的示範實驗，就可讓學生知悉單擺的週期與振幅無關；單擺長度越短，振動越快。

今天老師和家長還說伽利略在比薩大教堂觀察吊燈擺動的故事嗎？

(9) 本文只是扼要（以實驗出發）介紹了這個「質心 — 單擺」模型，還是省略了一些細節。若閣下希望可以瞭解更全面，及以理論推導數式，請閱讀筆者在 IOP 的 Physics Education 發表的拙文

“Revisiting the simple model of the late Professor Frank S Crawford for water wave dispersion relations, and thus obtaining a physical explanation of the depth-dependence of shallow water wave speeds”

(<https://doi.org/10.1088/1361-6552/ae1abe>)

* * * * *

作者：吳老師 (Chiu-King Ng)

ORCID iDs

<https://orcid.org/0000-0002-1290-1039>

<https://ngsir.netfirms.com>

<http://phy.hk>

電郵：feedbackAB@phy.hk 其中 AB 是 23 之後的質數