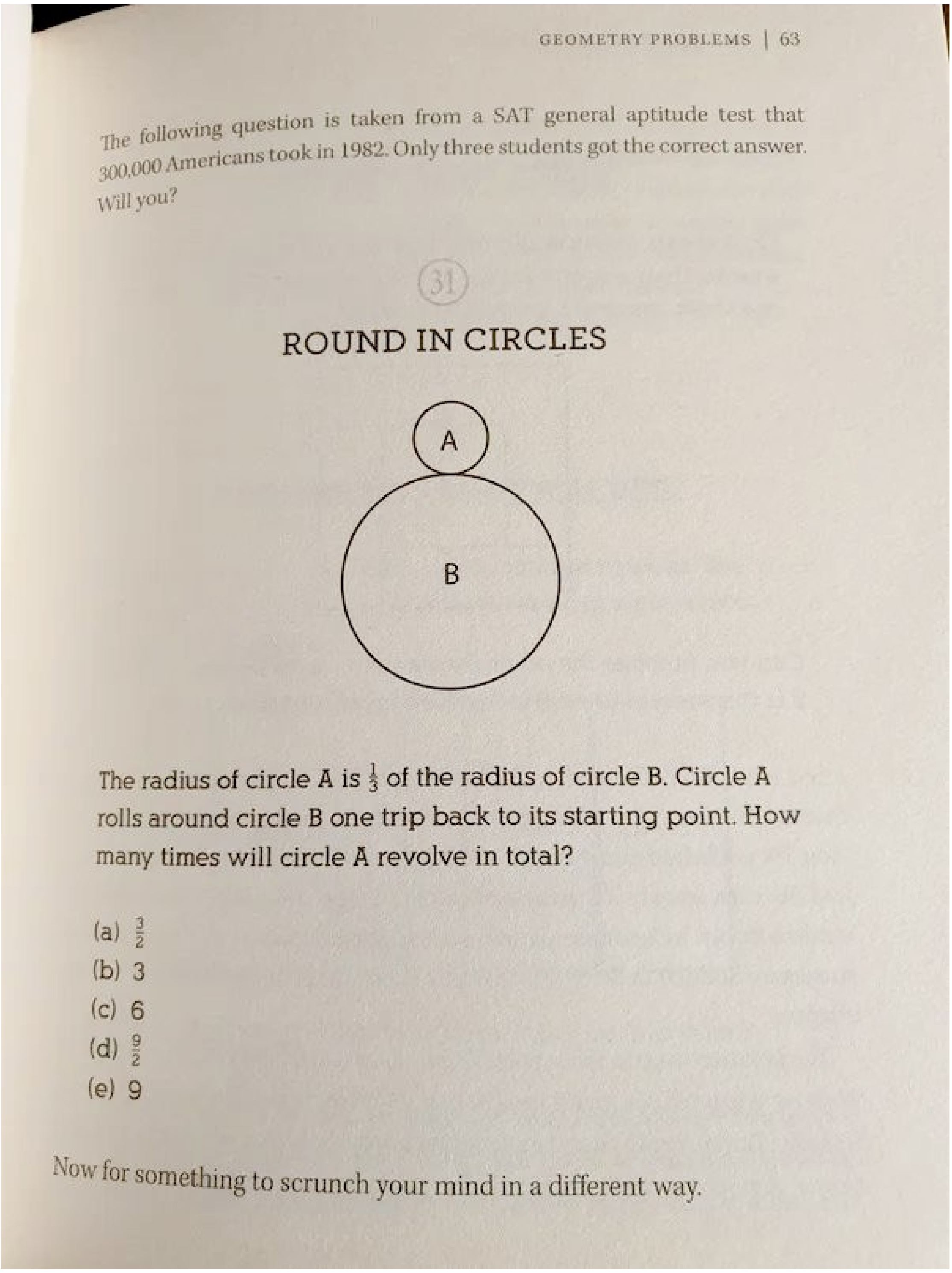


GEOMETRY PROBLEMS | 63

The following question is taken from a SAT general aptitude test that 300,000 Americans took in 1982. Only three students got the correct answer. Will you?

31

ROUND IN CIRCLES

The radius of circle A is $\frac{1}{3}$ of the radius of circle B. Circle A rolls around circle B one trip back to its starting point. How many times will circle A revolve in total?

(a) $\frac{3}{2}$
(b) 3
(c) 6
(d) $\frac{9}{2}$
(e) 9

Now for something to scrunch your mind in a different way.

（網上圖片）

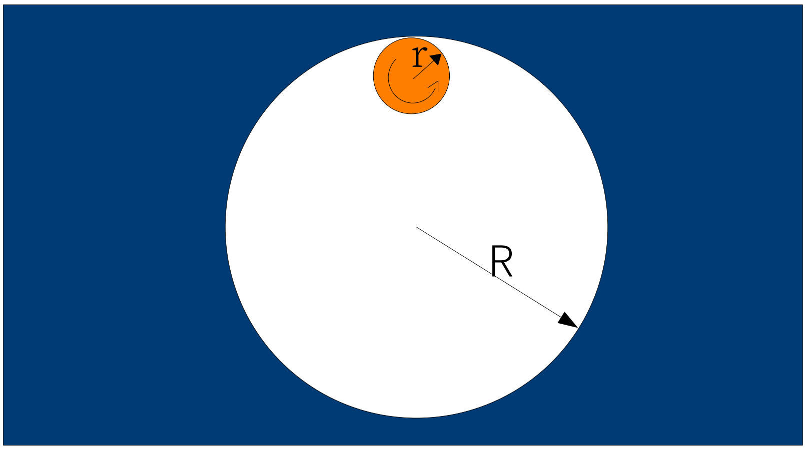
甚麼「只有三人能解」未必是，因為在一道選擇題，考生無從把答案寫上。少人「回答正確」乃必然，因為它的正確的答案根本不在那五個選擇中（題目出了錯，當年 The New York Times 也有報導）。

無疑，這道題真的有點兒困難，但讀者也不妨先試試解，才翻去下頁。

上頁數學題答案：4

問題 1： 貼着大圓內邊界滾動

半徑 r 的小圓盤貼着半徑 R 的圓坑的邊界作無滑動的滾動 (rolling without slipping)。小圓盤的自轉角速為 ω。問小圓盤滾動走完大圓坑邊界一次的時間為多少？



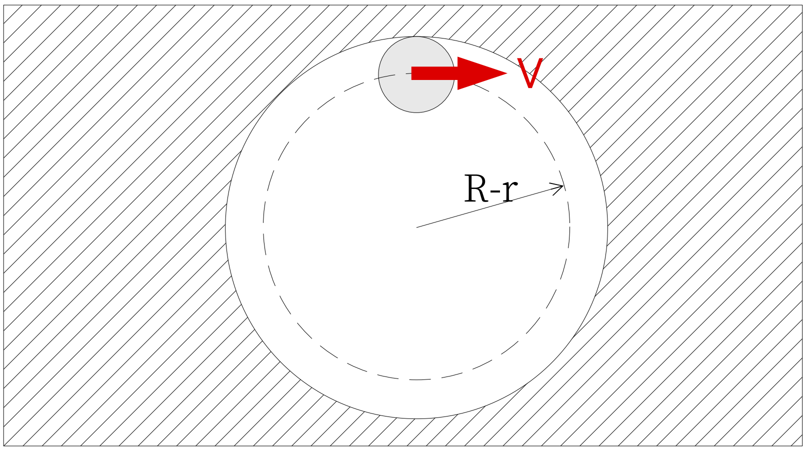
註： “無滑動的滾動 (rolling without slipping)” 乃物理名詞。數學題中沒有題及，是預設了一般的滾動就是如此，不須特別聲明。

算法一：

小圓盤的周界為 2πr，大圓坑的周界為 2πR，所以小圓盤需要滾動 2πR/2πr = R/r 次才可以沿坑的邊界走一圈。小圓盤轉動的周期為 2π/ω，所以**小圓盤沿大圓坑的邊界走一圈的時間為** $\frac{2\pi R}{\omega r}$ 。

算法二：

無滑動的滾動 (rolling without sliding) 的條件是 v=ωr，其中 v 是小圓盤中心的平移速度 (translational velocity)。雖然現在小圓盤的運動不是直線，它中心的速率仍是 v。小圓盤中心行走的是一個半徑為(R-r) 的圓周，即是 d=2π(R-r)。



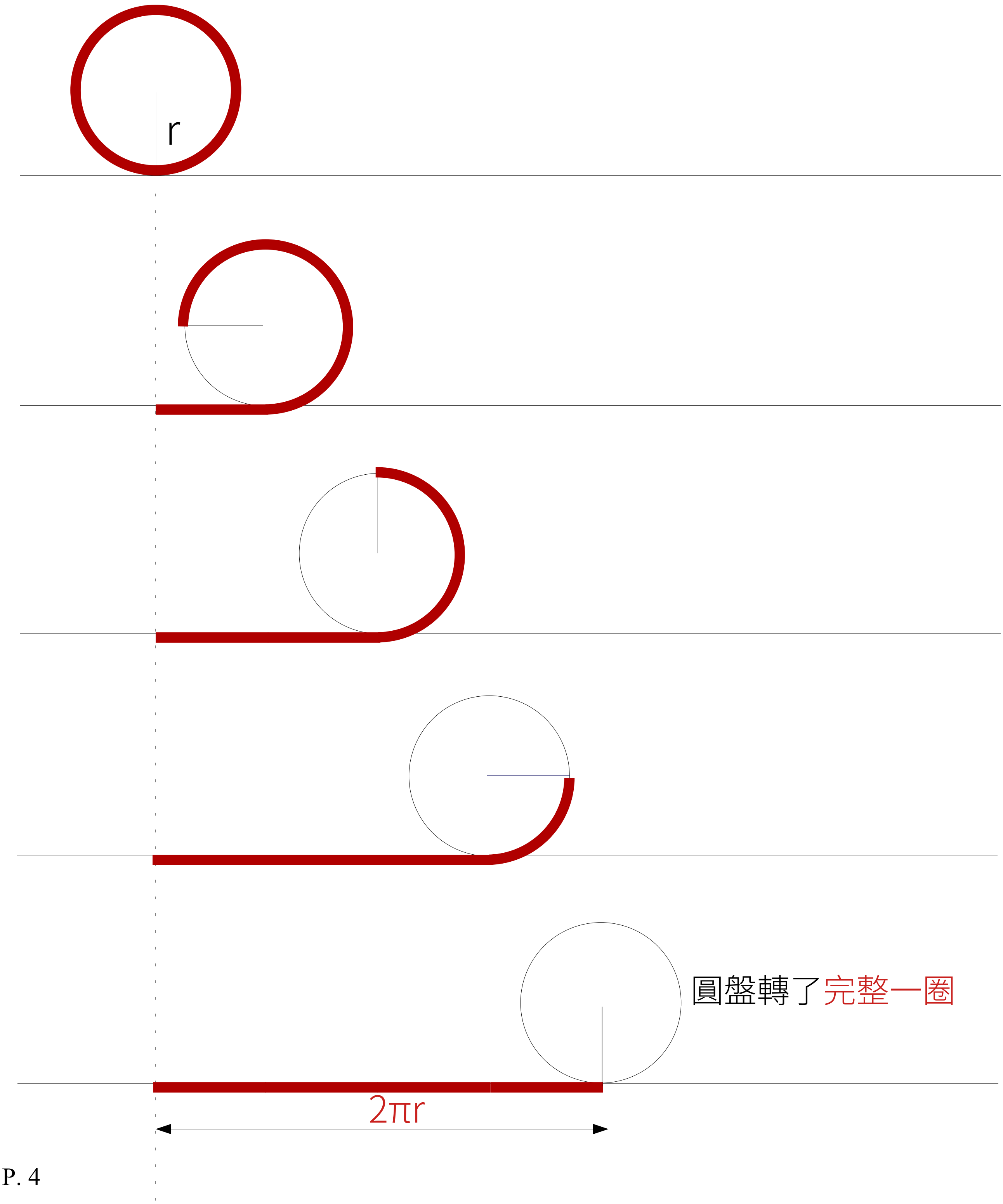
所以 **小圓盤繞大圓走一圈的時間為 d/v =** $\frac{2\pi(R-r)}{\omega r}$ 。

算法一和算法二的答案不同。其中有正確的答案嗎？

正確的答案是 $\dfrac{2\pi(R-r)}{\omega r}$ 。「算法二」是正確的，「算法一」啥地方出了問題？

分析：

此問題涉及一個概念，是關乎「無滑動的滾動」。我們問「圓盤在地上轉多少圈，它的中心才會前進它的周界長度來？」



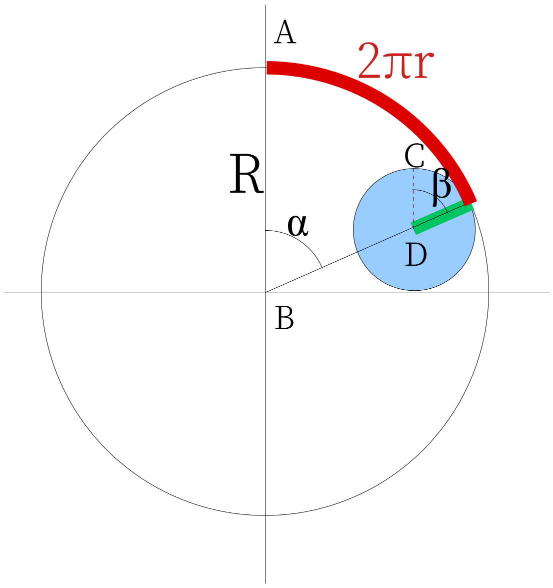
無錯，當在作無滑動的滾動 (rolling without sliding)， 圓盤自轉一圈，它在地上壓印出的距離必然就是它的周界 2πr。

惟這說法只適用於平地。

若圓盤在一圓曲面上滾動，那情況就很不一樣了！

留意那綠色半徑，開始時它是垂直向上。當在圓曲面上壓印出長度 2πr 時，此半徑還未轉足夠一圈。換言之，小圓盤自轉少於一圈已把它的周界壓印在那圓曲面上。

那欠多少才足夠一圈呢？



上圖 ∵Rα = 2πr

∴ α = 2πr/R

及 β = α (AB ∥ CD)

所以，當 小圓盤轉角 2π - β = 2π-2πr/R = 2π(R-r)/R 時，它已在圓曲面上壓印出它的周界 2πr 來。

修改「算法一」

小圓盤的周界為 2πr，大圓的周界為 2πR。

小圓盤轉角 2π(R-r)/R 時，它在圓曲面上壓印出它的周界 2πr。

∵2πR 是 2πr 的 R/r 倍

∴小圓盤在圓曲面上壓印出 2πR，它需要轉動的角總共為

$$\theta = (2\pi(R-r)/R) \times (R/r) = 2\pi(R-r)/r$$

∵小圓盤的角速為 ω

∴小圓盤轉角 θ =2π(R-r)/r 所需的時間是 θ/ω = $\frac{2\pi(R-r)}{\omega r}$

總是少一圈

事實是，它需要轉的總次數應該是 $\theta/2\pi = 2\pi(R-r)/r \div 2\pi = R/r - 1$ 。

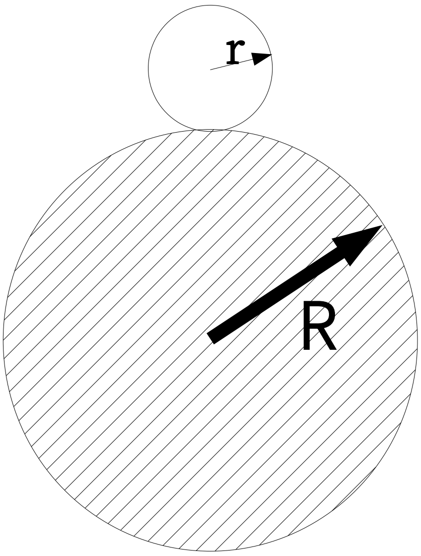
即是比 R/r 次 少 一 次 就對了，而這個「少一次」是與 r 和 R 無關。

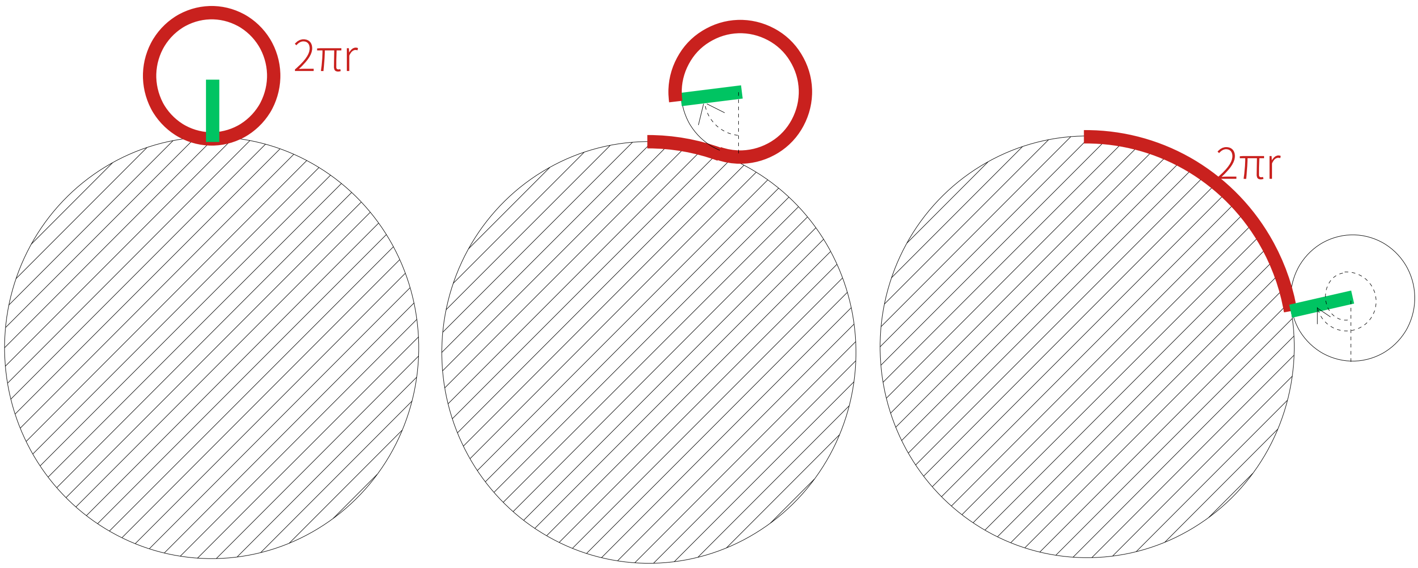
換言之，

> 那“不足 2π 的自轉”一共出現了 R/r 次，這相等於 R/r -1 次完整的 2π 自轉 。

問題 2： 貼着大圓外邊界滾動

半徑 r 的小圓盤貼着一固定不動、半徑為 R 的大圓盤的邊界作無滑動的滾動 (rolling without slipping)。小圓盤的自轉角速為 ω。問小圓盤滾動走完大圓盤邊界一次的時間為多少？



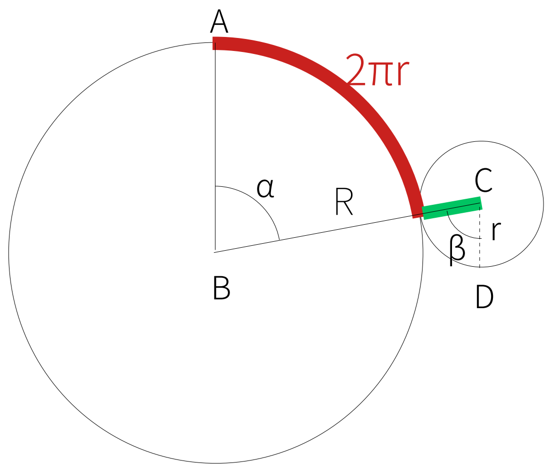


小圓盤要多於一圈 的自轉才可把它的周界 2πr 壓印在那圓曲面上

參考右圖　∵ $R\alpha = 2\pi r$

　　　　　∴ $\alpha = 2\pi r/R$

及　　　　　$\beta = \alpha$　(AB // CD)



所以，當 小圓盤轉角 $2\pi + \beta = 2\pi+2\pi r/R = 2\pi(R+r)/R$ 時，它才可把它的周界 $2\pi r$ 壓印在曲面上。

<u>總是多一圈</u>

長度 $2\pi R$ 中共有 R/r 個 $2\pi r$ ，所以那 “多於一圈 2π 的自轉” 一共要出現 R/r 次。所以總共多出的角 $= \beta(R/r) = 2\pi$ ，亦即是剛巧一圈。

換言之，

那 “多於 2π 的自轉”一共出現了 R/r 次，這相等於 $R/r + 1$ 次完整的 2π 自轉 。

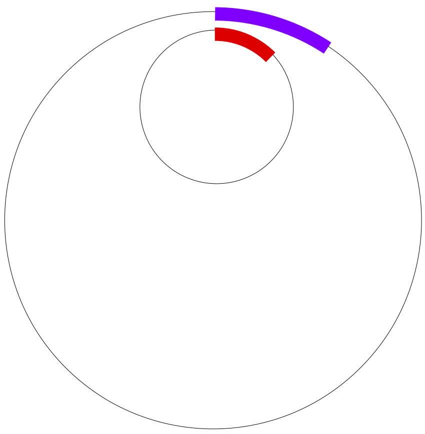
小圓盤沿大圓盤的邊界滾動走一圈的時間為 $2\pi(R+r)/\omega r$。

為何與平地有別？

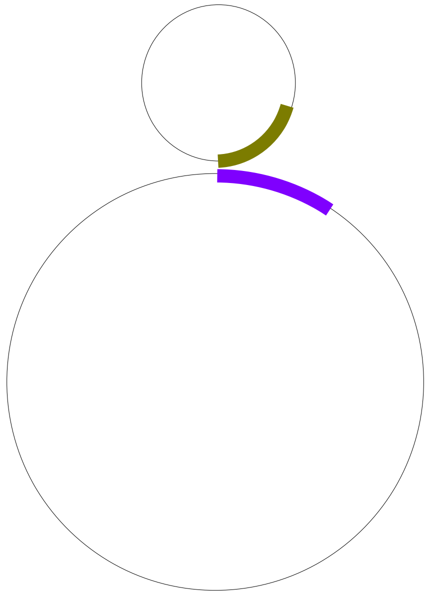
最初，我們很直觀地想：“小圓的周界為 2πr，大圓的周界為 2πR，所以小圓需要滾動 2πR/2πr = R/r 次才可以沿大圓的邊界走一圈”。

這只是小圓在平地上滾動的結果。

事實是，曲面是 有利，或不利 於小圓把它的周界壓印在其上。



小圓沿大圓內邊界滾動，小圓和大圓的**彎曲方向總是相同**；是大圓「挨近」了小圓，像是大圓在「迎接」與小圓的接觸。明顯，這是**有利**於小圓在它滾動時把它的周界印在大圓上，即是小圓比在平路轉的角少一些已達到這效果。



小圓沿大圓外邊界滾動，小圓和大圓的**彎曲方向總是相反**；是大圓「遠離」了小圓，像是大圓在「抗拒」與小圓的接觸。明顯，這是**不利**於小圓在它滾動時把它的周界印在大圓上，即是小圓要比在平路轉的角要多一些才達到這效果。

作者：吳老師 (Chiu-King Ng)
https://ngsir.netfirms.com
http://phy.hk
電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數