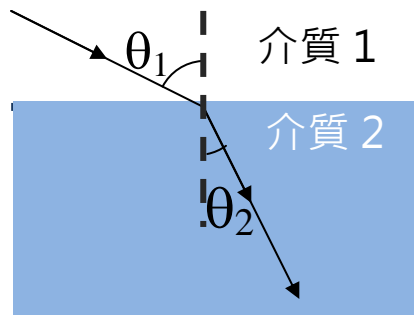


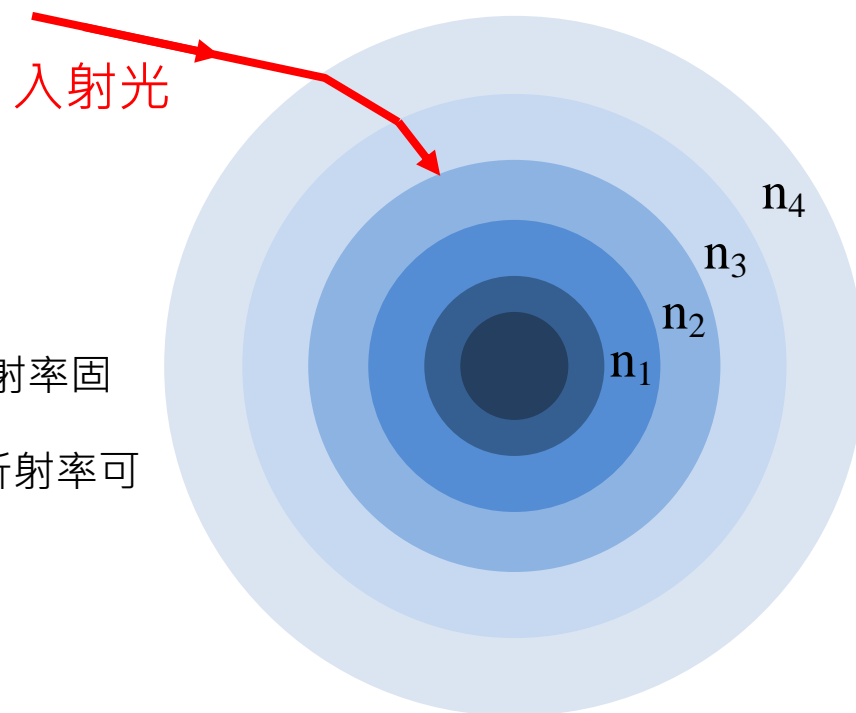
同心殼層介質折射公式推導

大家熟悉的折射公式：



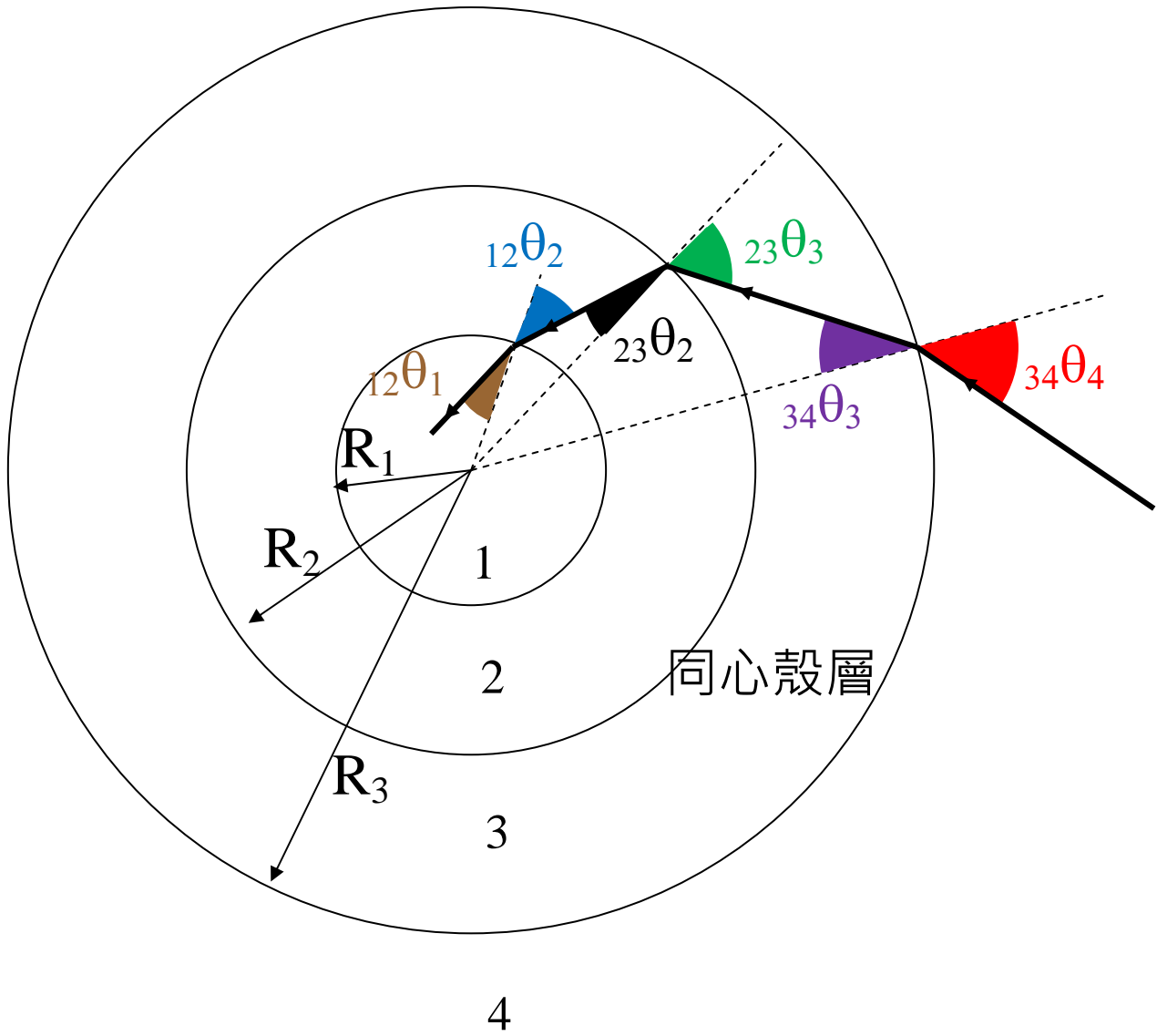
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

你可以把公式推廣適用於不同折射率的同心殼層介質嗎？

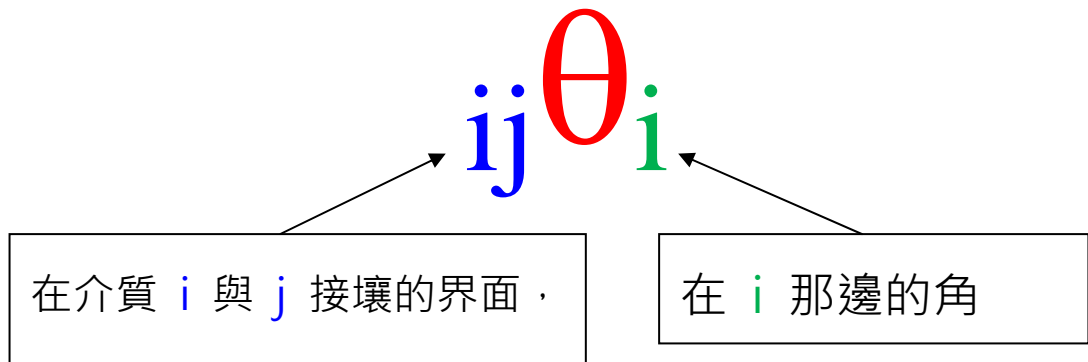


每一層的折射率固定，但層的折射率可以不同。

我們考慮下圖。



我們定義角度



(1) 同一界面兩邊的角度，即是

$${}_{12}\theta_1 \text{ 和 } {}_{12}\theta_2 \text{ 、}$$

$${}_{23}\theta_2 \text{ 和 } {}_{23}\theta_3 \text{ 、}$$

$${}_{34}\theta_3 \text{ 和 } {}_{34}\theta_4 \text{ 。}$$

應用基本的 snell's law，

$$n_1 \sin {}_{12}\theta_1 = n_2 \sin {}_{12}\theta_2 \quad (1a)$$

$$n_2 \sin {}_{23}\theta_2 = n_3 \sin {}_{23}\theta_3 \quad (1b)$$

$$n_3 \sin {}_{34}\theta_3 = n_4 \sin {}_{34}\theta_4 \quad (1c)$$

在同一界面兩邊的角度的半徑 R (指由中心至該界面的距離) 相同。

在 (1a) 的兩邊乘 R_1 ; 在 (1b) 的兩邊乘 R_2 ; 在 (1c) 的兩邊乘 R_3 。得

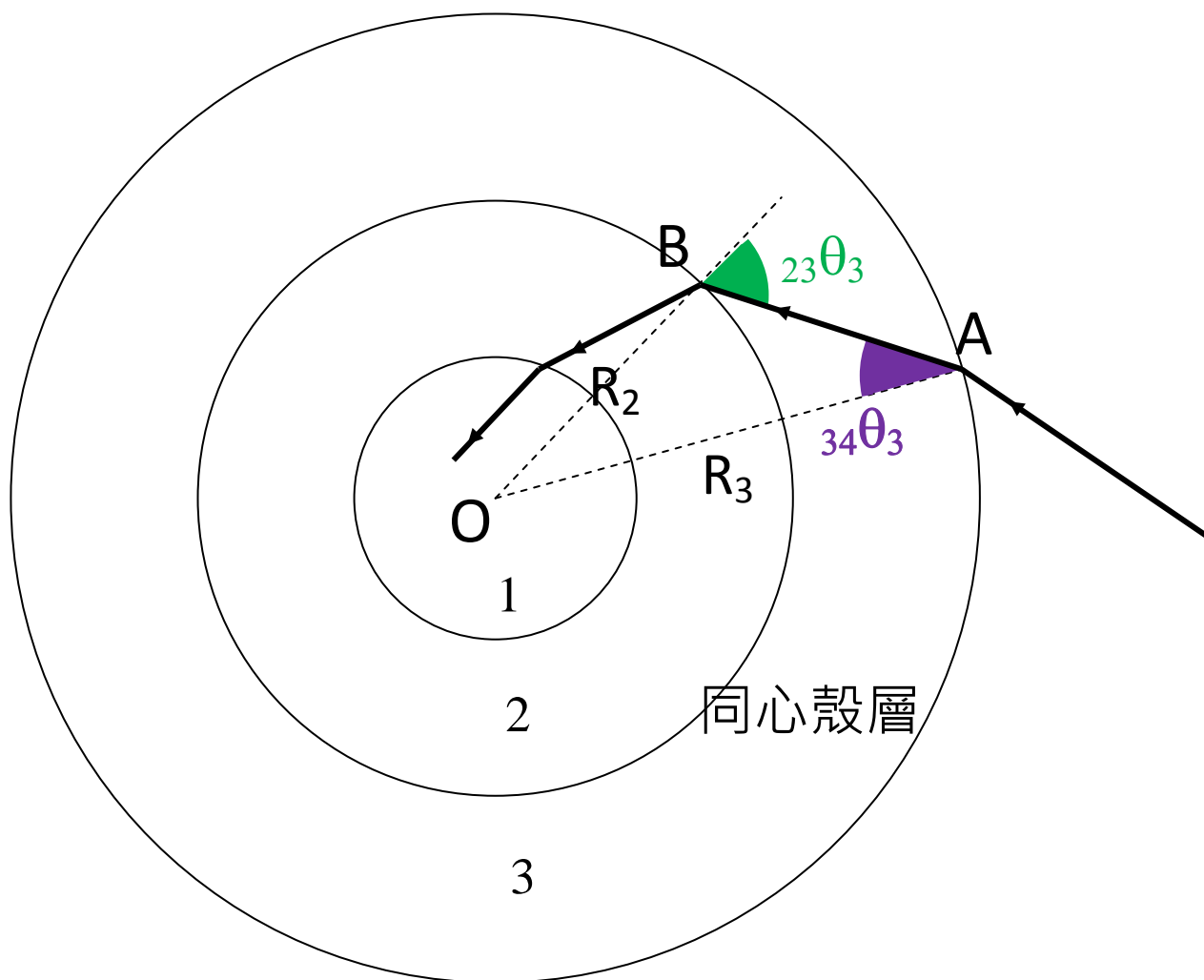
$$n_1 R_1 \sin_{12} \theta_1 = n_2 R_1 \sin_{12} \theta_2 \quad (2a)$$

$$n_2 R_2 \sin_{23} \theta_2 = n_3 R_2 \sin_{23} \theta_3 \quad (2b)$$

$$n_3 R_3 \sin_{34} \theta_3 = n_4 R_3 \sin_{34} \theta_4 \quad (2c)$$

(2) 同一介質內的兩個角度。

我們以介質 3 的 ${}_{23}\theta_3$ 和 ${}_{34}\theta_3$ 為例



在 $\triangle OAB$ ， $OA = R_3$ 、 $OB = R_2$ 、 $\angle OAB = {}_{34}\theta_3$ 和
 $\angle OBA = 180^\circ - {}_{23}\theta_3$

利用 **sine formula** ,

$$\frac{\sin \angle OBA}{OA} = \frac{\sin \angle OAB}{OB}$$

i.e.
$$\frac{\sin(180^\circ - {}_{23}\theta_3)}{R_3} = \frac{\sin {}_{34}\theta_3}{R_2}$$

或
$$\frac{\sin {}_{23}\theta_3}{R_3} = \frac{\sin {}_{34}\theta_3}{R_2}$$

得

$$R_2 \sin {}_{23}\theta_3 = R_3 \sin {}_{34}\theta_3$$

因屬同一介質 3 內，把上式兩邊乘 n_3 。

$$n_3 R_2 \sin {}_{23}\theta_3 = n_3 R_3 \sin {}_{34}\theta_3 \quad (3a)$$

同樣地，我們得

$$n_2 R_1 \sin {}_{12}\theta_2 = n_2 R_2 \sin {}_{23}\theta_2 \quad (3b)$$

我們把 (2a)、(2b)、(2c)、(3a) 和 (3b) 連在一起，得

$$\begin{aligned}
n_1 R_1 \sin_{12} \theta_1 &= n_2 R_1 \sin_{12} \theta_2 \\
&= n_2 R_2 \sin_{23} \theta_2 = n_3 R_2 \sin_{23} \theta_3 \\
&= n_3 R_3 \sin_{34} \theta_3 = n_4 R_3 \sin_{34} \theta_4
\end{aligned}$$

(4)

式 (4) 的意義 — 在任何發生折射的位置，

$$nR \sin \theta = \text{常數}$$

↙
↙

θ 那邊的折射率
圓心至該點半徑

所以，同心殼層介質折射公式是

$$nR \sin \theta = \text{常 數}$$

這是我們熟悉的 “ $n \sin \theta = \text{常數}$ ” 的引伸。

問 題:

1。以折射率為 n' 製成的玻璃毛細管內盛裝折射率為 n 的液體。已知 $n < n'$ ，毛細管的外半徑為 R ，問毛細管的內半徑 r 最小是多少，才令所有射向毛細管的光線均可進入管內液體？

<http://phy.hk/DSE/smallestr.pdf>

2。地球的大氣密度會隨高度而減少。近地面空氣的折射率是 1.0003。出了大氣，真空的折射率是 1。把光從地面射上天空，雖然折射率由大至小連續地很輕微改變，而不是一個突變，但光都是從光密介質射向光疏介質。請探討有沒有可能在這情況下發生全內反射。

http://phy.hk/DSE/atmosphere_tir.pdf

吳老師 (Chiu-king Ng)

<https://ngsir.netfirms.com>

<http://phy.hk>

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數