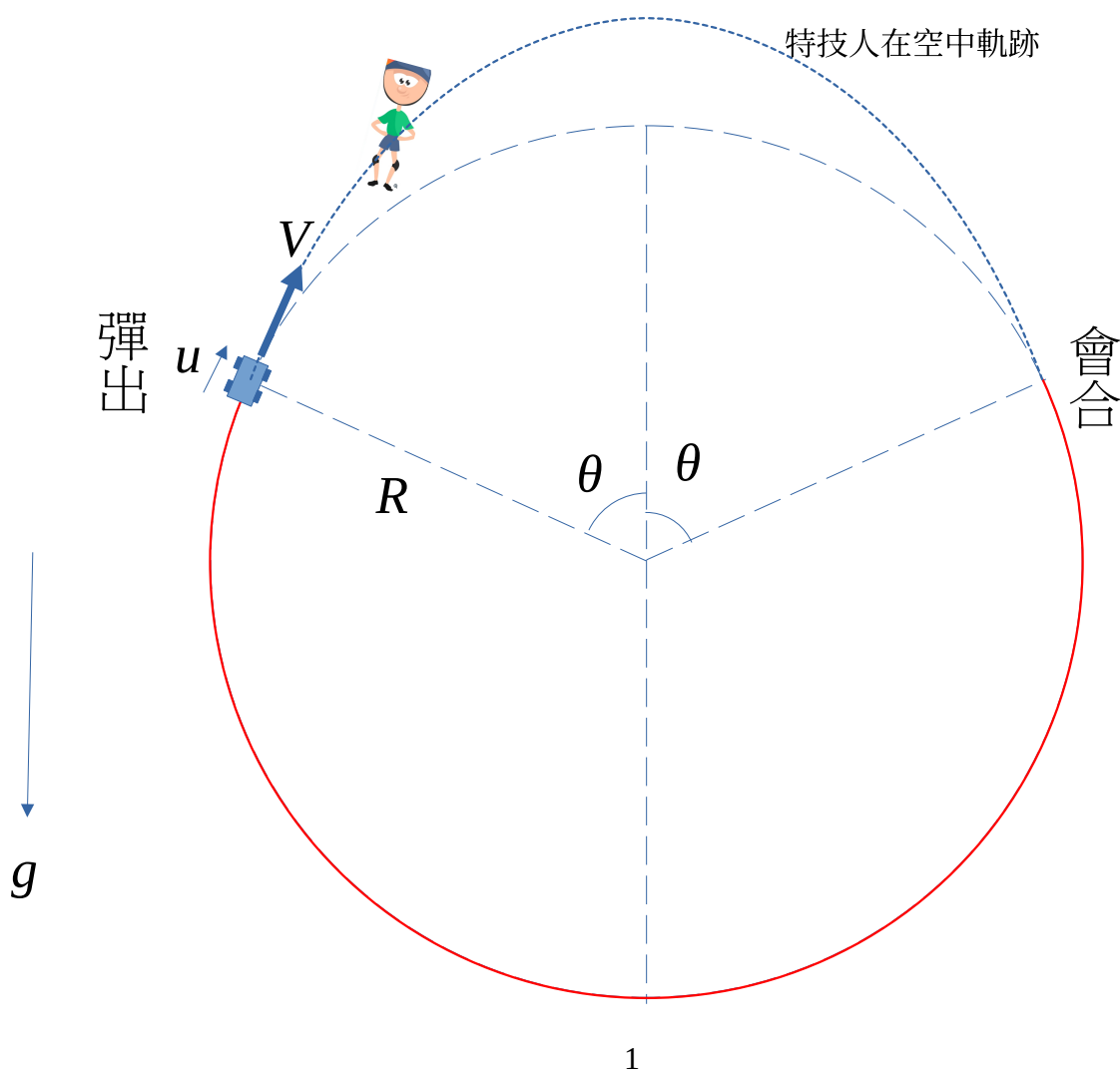


一馬戲團設計新的戶外大型表演：特技人乘坐一機動車，沿一個半徑 R 的垂直圓形軌道上以勻速率 u 行駛。在圓軌道上方某一預定角度位置 θ ，特技人以相對地面速度 V 切線彈出並在空中做一連串花式動作，之後他可以準確在軌道的另一邊的相同角度 θ 跌回車廂。假設特技人飛出車外沒有影響車速，及特技人在空中受到的空氣阻力可以忽略。



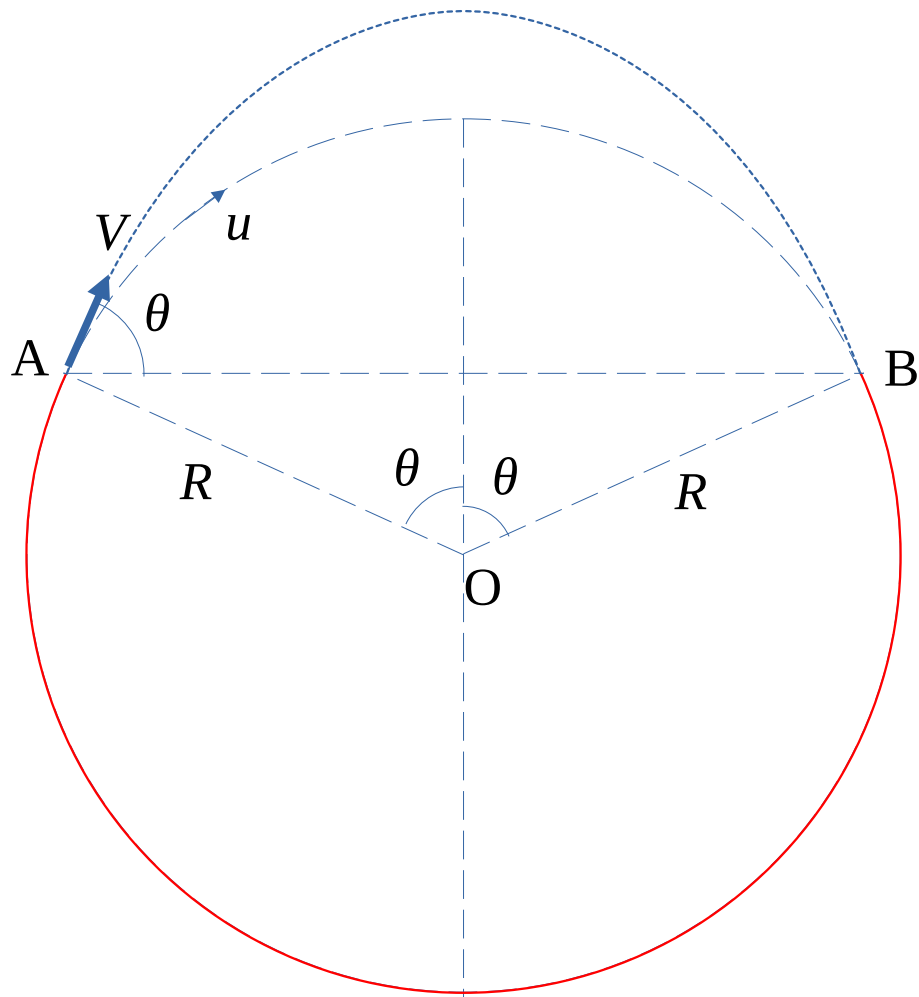
問題：

(i) 車與人要成功會合，兩者的時間要非常配合。請列出這時間的要求。

(ii) 列出車與人成功會合的另一要求。

(iii) 由讀者自定一個合理的 R 和 u 值，並求對應的 θ 及 V 。

(i)



由 A 至 B :

車勻速率圓周運動，時間 $t_1 = \frac{R(2\theta)}{u}$

$$t_1 = \frac{2R\theta}{u} \quad (1)$$

人在空中拋物線，時間 $t_2 = \frac{2R \sin \theta}{V \cos \theta}$

$$t_2 = \frac{2R \tan \theta}{V} \quad (2)$$

若 $t_1 = t_2$ ，那 $V = u \left(\frac{\tan \theta}{\theta} \right)$ (3)

\because 當 θ 在 0 至 $\pi/2$ 之間， $\tan \theta > \theta$ （ θ 是弧度）

$$\therefore V > u$$

這個 V 和 u 均是相對地面的速度，所以 “ $V > u$ ” 是「彈出」的一項必要條件。

(ii) 其實，上式 (2)， $t_2 = \frac{2R \tan \theta}{V}$ 只是拋物線在這時間的水平

位移是 **AB** 而已，並未保證跌回 B 點。

如果要求垂直方向的位移是零，那 t_2 的一半垂直初速變零（到頂）。

$$\therefore 0 = V \sin \theta - g \frac{t_2}{2}$$

把式(2)代入,得

$$V^2 = \frac{gR}{\cos \theta}$$

(4)

(iii) 式 (3) 和式 (4) 是關連 4 個參數 (R, u, θ 和 V) 的聯立方程。

$$V = u\left(\frac{\tan \theta}{\theta}\right), \quad V^2 = \frac{gR}{\cos \theta}$$

即是說，我們要先定出這 4 個參數的其中兩個，然後再解聯立方程求其餘兩個。

現在，我們定下 R 和 u ，然後求 θ 和 V 。

把式 (3) 和式 (4) 合併，消去 V ，得一解 θ 的方程。

$$\cos^2 \theta + \left(\frac{gR}{u^2}\right)\theta^2 \cos \theta - 1 = 0 \quad (5)$$

此方程含有 θ 及 $\cos \theta$ ，是一條超越方程 (transcendental equation)，解此等方程唯有採用數值法 (numerical method)。

我們嘗試問人工智能 AI 求解。

這裏，我們取 $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$, $R = 20 \text{ m}$, $u = 12 \text{ ms}^{-1}$ ，那 $gR/u^2 = 1.3625$ 。

問 AI

求以下方程 θ 在 0 至 $\pi/2$ 之間的數字解，準確至 3 位有效數字

$$(\cos \theta)^2 + 1.3625(\theta^2)(\cos \theta) - 1 = 0$$

AI 答

$$\theta = 1.04$$

（建議問多幾款 AI，以檢查答案是否無誤。其實，很多高中生也懂的“二分法”（method of bisection）已足夠解此類方程）

這個 $\theta = 1.04$ 即是 59.6° 。

再由式（3）求得 $V = 1.63 u$ 。即是特技人彈出時，相對車他的速度為 $0.63 u$ 。



作者：吳老師 (Chiu-King Ng)

<https://ngsir.netfirms.com>

<http://phy.hk>

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數