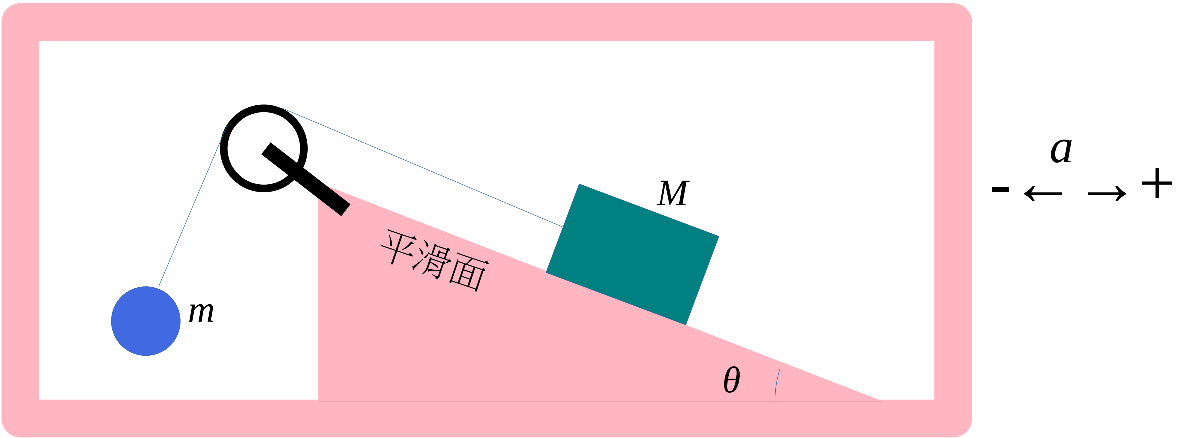
問題（挑戰題）：



上圖箱子和楔子連在一起。楔子的斜面平滑沒有摩擦，滑輪平滑沒有摩擦，繩子不可延伸，繩子質量可以忽略。現在箱子以勻加速 a 水平移動，可使 M 在斜面不會上升或滑下及懸掛 m 的繩子的傾斜固定。設 a 向右的方向為正，向左的方向為負。

(a) 證明加速 a 必須符合條件 $-g\cot\theta \ \le\ a\ \le\ g\tan\theta$。

(b) 證明加速 a 滿足方程

$$M\left(g\ \sin\theta - a\ \cos\theta\right)\ =\ m\sqrt{a^2+g^2}$$ 。

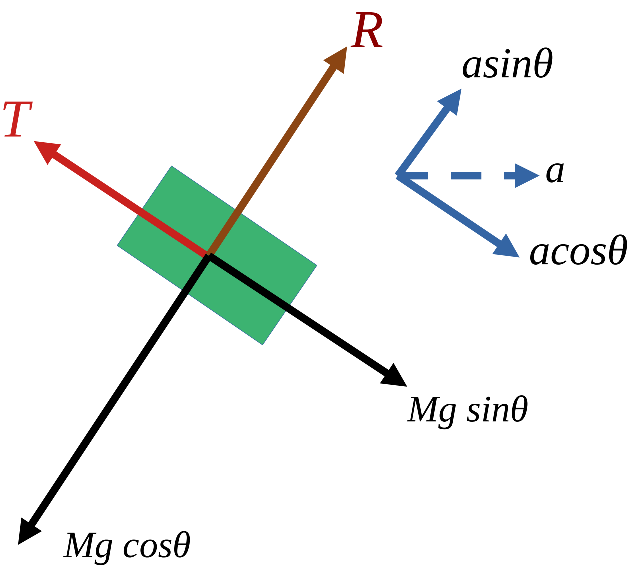
(c) 證明若當 $m\ >\ M$，a 沒有實解（real solution）。

(d) 試求 a 的通解（general solution）。

解答：

（a）答案

M 受到的外力（已把 Mg 分拆 $Mg\sin\theta$ 和 $Mg\cos\theta$）：



$\therefore \quad R - Mg\cos\theta = Ma\sin\theta \quad \ldots（1.1）$

$Mg\sin\theta - T = Ma\cos\theta \quad \ldots（1.2）$

補充：不是把 a，而是把力分拆為水平和垂直兩分量，可以嗎？當然可以，但那時 T 和 R 會同時出現在兩式中，數學運算比較複雜而已。

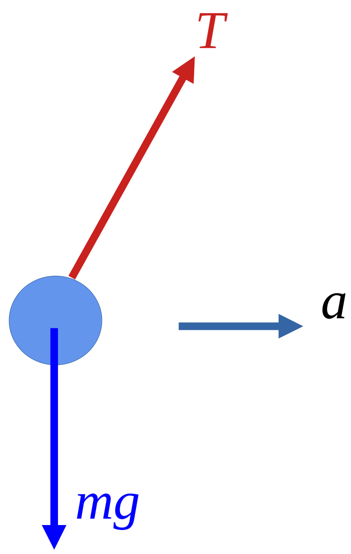
- 繩的張力 T 不可以負。由式（1.2），$T \geq 0$ 表示 $a \leq g\tan\theta$。

- 另外，斜板的法向力 R 也不能負。由式（1.1），$R \geq 0$ 表示 $a \geq -g\cot\theta$。

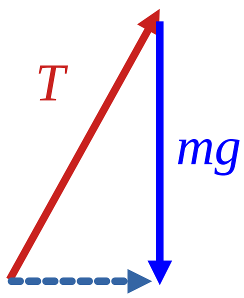
所以，a 須滿足條件 $-g\cot\theta \leq a \leq g\tan\theta$。

（b）答案

m 受到的外力：



T 和 mg 的合力（resultant force）必是水平，其量值等於 ma。



$$\therefore \quad T^2 = (ma)^2 + (mg)^2$$

$$\therefore \quad T = m\sqrt{a^2 + g^2}$$

由式（1.2），$T = Mg\sin\theta - Ma\cos\theta$

由最後兩式，得 $M(g\sin\theta - a\cos\theta) = m\sqrt{a^2 + g^2}$ …（2）

（c）(d)答案

把式（2）兩邊平方，

$(Mg\ sin\theta\ \ -\ Ma\ cos\theta\ )^2 = m^2(a^2 + g^2)$。

整理後，得二次方程（quadratic equation）

$$\left(M^2\cos^2\theta - m^2\right)a^2 - \left(2M^2 g\ \sin\theta\ \ cos\theta\right)a + M^2 g^2 \sin^2\theta - m^2 g^2\ =\ 0$$

…（3）

情況 I： a^2 的系數為零，即是 $M^2\cos^2\theta\ \ - m^2 = 0$，亦即是

$$\frac{m}{M} = \cos\ \theta \quad \ldots（4）$$

式（3）變成一次方程

$$-\left(2M^2 g\sin\theta\, cos\theta\right)a + M^2 g^2 \sin^2\theta - m^2 g^2\ =\ 0$$

利用式（4），我們求得

$$a\ =\ \frac{g}{2}\left(\tan\ \theta\ \ -\ \ \cot\ \theta\right)。\quad \cdots（5）$$

不難證明式（5）的 a 已自動滿足了（a）的那條件
"$-g\cot\theta\ \le\ a\ \le\ g\tan\theta$"。

情況 II： a^2 的系數不為零，即是 $M^2\cos^2\theta - m^2 \neq 0$。

利用二次公式求式（3）的解，簡化後得出

$$a = \left(\frac{\sin\theta\cos\theta \pm \beta\sqrt{1-\beta^2}}{\cos^2\theta - \beta^2}\right)g, \quad \cdots（6）$$

其中 $\beta = \dfrac{m}{M}$。

1. 若當 $m > M$，a 沒有實解。注意情況 I 也不可能會是 $m > M$。

2. 但凡在解題時有“兩邊平方”的步驟，求得的解皆須檢核以找出真正的解。式（6）求得的兩解須要加以核查，看看是否符合條件"$-g\cot\theta \leq a \leq g\tan\theta$"（$T \geq 0$ 和 $R \geq 0$）。

a 的通解

設 $\beta = \dfrac{m}{M}$。

1. 若 $\beta > 1$，a 沒有實解。

2. 若 $\beta \leq 1$及

   2.1 $\beta = \cos\theta$，那 $a = \dfrac{g}{2}(\tan\theta - \cot\theta)$。

   2.2 $\beta \neq \cos\theta$，那

$$a = \left(\frac{\sin\theta\cos\theta \pm \beta\sqrt{1-\beta^2}}{\cos^2\theta - \beta^2}\right)g \text{ 。}$$

答案須以 $-g\cot\theta \leq a \leq g\tan\theta$ 來檢查作準。

例子：

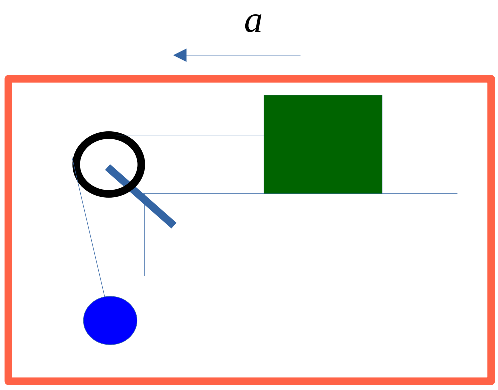
（1）$\theta = 60^0$，$m/M = 0.5$。
屬於通解中 2.1 的情況。利用式（5），

$a = 9.81\times(\tan 60^0 - \cot 60^0)/2 = 5.66\ ms^{-2}$

（2）$\theta = 0^0$，$M > m$。
屬於通解中 2.2 的情況，
利用式（6）得 $a = \pm\dfrac{mg}{\sqrt{M^2 - m^2}}$，

甄選條件是 $-\infty \le a \le 0$。

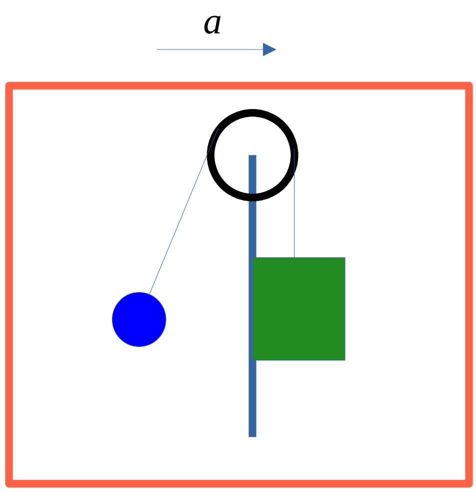
所以 $a = \dfrac{-mg}{\sqrt{M^2 - m^2}}$。



（3）$\theta = 90^0$，$M > m$。
屬於通解中 2.2 的情況，
由式（6）得 $a = \dfrac{\pm g\sqrt{M^2 - m^2}}{m}$，

甄選條件是 $0 \le a \le \infty$。

所以 $a = \dfrac{g\sqrt{M^2 - m^2}}{m}$



（4）M=4 kg, m = 1 kg, θ =30^0
屬於通解中 2.2 的情況，

由式（6）得 a = 9.63 或 2.73
甄選條件是 $-16.99 \le a \le 5.66$。

所以 a = 2.73 ms^{-2}。

（5）M=3 kg, m = 1 kg, θ =10^0
屬於通解中 2.2 的情況，

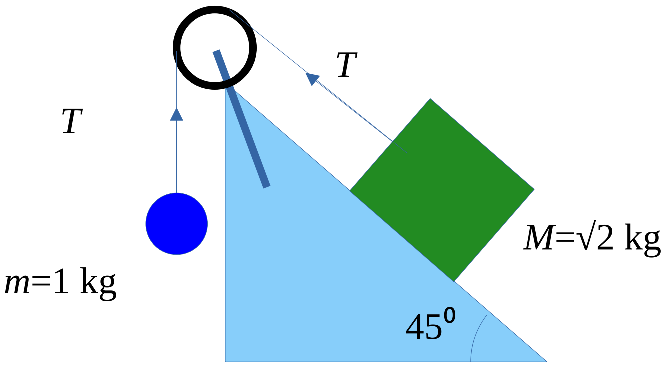
由式（6）得 a = -1.64 或 5.54
甄選條件是 $-55.64 \le a \le 1.73$。

所以 a = -1.64 ms^{-2}。

（6）M=√2 kg, m = 1 kg, θ =45^0

∵ $m/M = \cos\theta$ ∴ 屬於通解中 2.1 的情況。
利用式（5），$a = 9.81\times(\tan 45^0 - \cot 45^0)/2 = 0$ ms^{-2}

即是不須加速 **m** 和 **M** 已是不動的了。



$T = mg$，

T 也是等於 $Mg \sin 45^0$

作者：吳老師（Chiu-King Ng）

https://ngsir.netfirms.com

http://phy.hk

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數