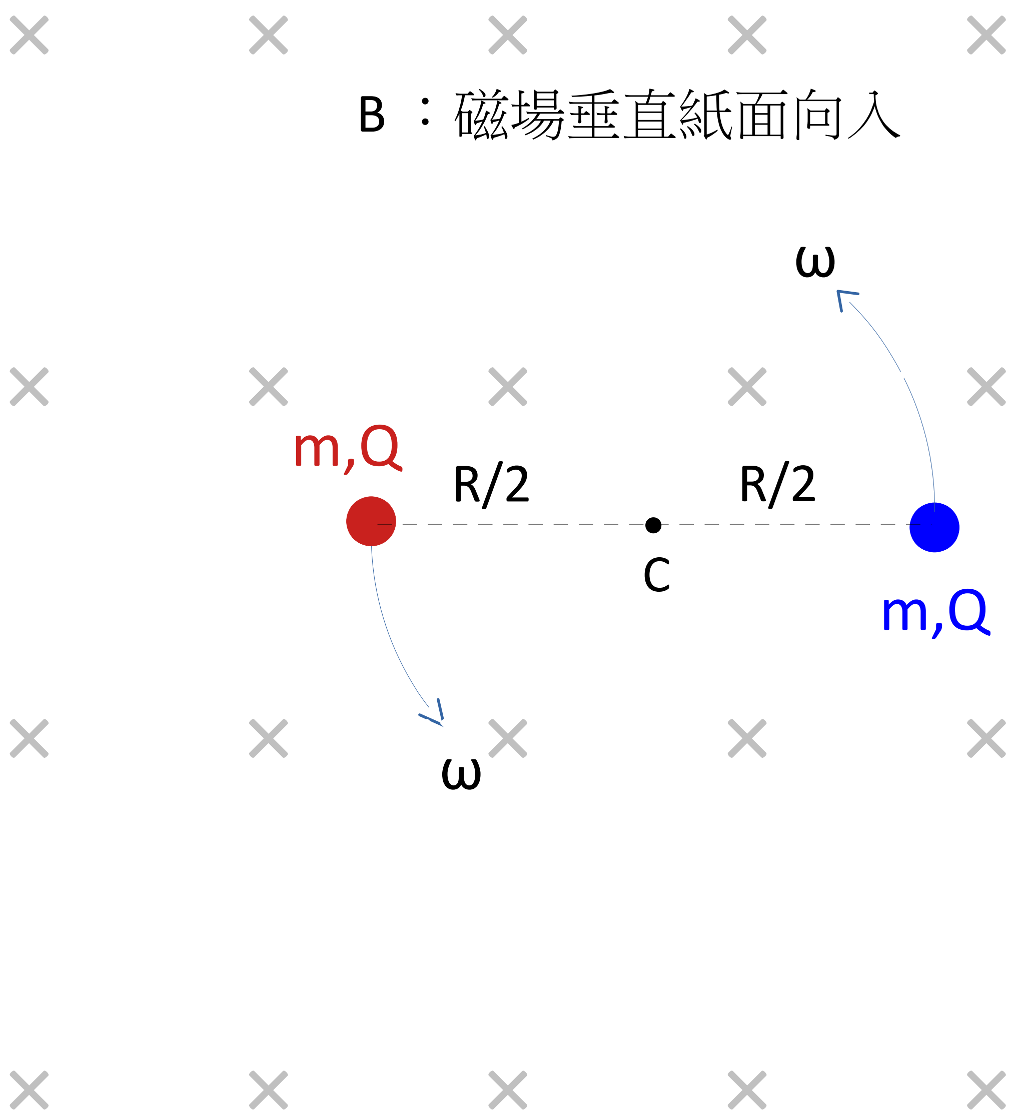
問題：

兩粒子質量 m 相同，攜帶的電荷 Q 也相同。它們在一垂直紙面向入的均勻磁場 B 以它們連線的中點為圓中心作相同角速度(angular velocity) ω 的圓周運動。設粒子的相隔距離為 R。



(a) 作用於粒子甚麼力提供圓周運動需要的向心力？

(b) 證明若 $R < \sqrt[3]{\dfrac{2m}{\pi\varepsilon_0 B^2}}$，上述圓周運動不可能出現。

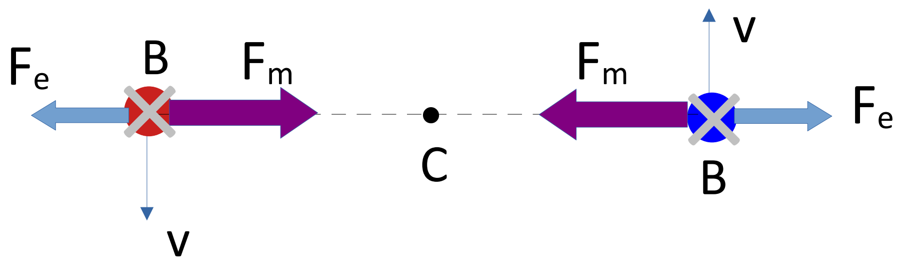
(c) 試扼要定性解釋為甚麼當粒子太接近，上述圓周運動不可能出現。

(d) 若這兩粒子攜帶的電荷分別為 +Q 和 -Q ，那仍要 R 大於某值，圓周運動才可以出現嗎？

（假設電荷因圓周加速而以電磁波釋放的能量可以忽略）

解答

(a)




作用於每粒電荷的力包括有

$F_m$ ：磁場作用它們的磁力 $BQv = BQ\omega\frac{R}{2}$。依照它們的速度方向，它們受到的磁力均是向圓心 C。

$F_e$ ：電荷之間的庫侖排斥力 $\frac{kQ^2}{R^2}$，其中 $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$。

(b) $F_m - F_e$ 用作向心力，即是

$$BQ\omega\frac{R}{2} - \frac{kQ^2}{R^2} = m\omega^2\frac{R}{2}$$ 。所以

$$m\left(\frac{R}{2}\right)\omega^2 - BQ\left(\frac{R}{2}\right)\omega + \frac{kQ^2}{R^2} = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

式（1）是 ω 的一條二次方程（quadratic equation）。當式（1）的判別式（discriminant）$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ， ω 不存在實解，即是

$$\left[BQ\left(\frac{R}{2}\right)\right]^2 - 4\left[m\left(\frac{R}{2}\right)\right]\left(\frac{kQ^2}{R^2}\right) < 0$$ 。

整理後，得出

$R^3 < \frac{8mk}{B^2}$，或 $R < \sqrt[3]{\frac{2m}{\pi\varepsilon_0 B^2}}$。

我們定義 $R_{min} = \sqrt[3]{\dfrac{2m}{\pi\varepsilon_0 B^2}}$。

(i) $R > R_{min}$，那時 $\omega$ 存在兩個實解。

(ii) $R = R_{min}$，那時 $\omega = \dfrac{BQ}{2m}$。

(iii) $R < R_{min}$，那時 $\omega$ 不存在實解。

(c) 正電荷受着互相排斥的庫侖力 (Coulomb force) 作用，所以電荷只可以是依靠那向着圓心的磁力來製造圓周運動所需要的向心力。

庫侖力 $F_e \propto 1/r^2$，所以當電荷非常接近時，那就需要一個很大的磁力來平衡庫侖力，兼且會製造一個向中心的淨力。

磁力($BQ\omega r$) $\propto\omega$，所以當 r 很小，就要一個非常大的 ω 才可以製造一個很大的磁力。但另一方面，向心力($m\omega^2 r$) $\propto\omega^2$。所以，當 ω 增大，磁力雖然是很大，但需求的淨力也會是很大。

若 $r\rightarrow 0$，r 小於某一臨界值，以下情況就必然會出現：ω 無論再如何增大，也不可能會製造出一個比之更大的向心力($\propto\omega^2$)。所以，此時圓周運動就不可能發生了。

(d) 若這兩粒子攜帶的電荷分別為 +Q 和 -Q ，那它們的庫侖力 (Coulomb force)是互相吸引。此相吸力可貢獻為向心力的一部份，（c）講述的情況不會發生。式（1）會變成

$$m\left(\frac{R}{2}\right)\omega^2 \; - \; BQ\left(\frac{R}{2}\right)\omega \; - \; \frac{kQ^2}{R^2} \; = \; 0$$

上式的判別式 Δ 恒為正，即是上式總可求得 ω 的一個大於零的實解。

作者：吳老師 (Chiu-King Ng)

https://ngsir.netfirms.com

http://phy.hk

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數