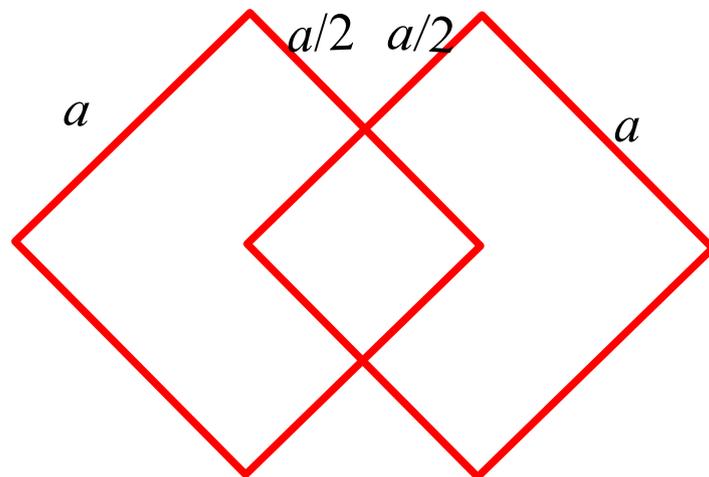


問題：

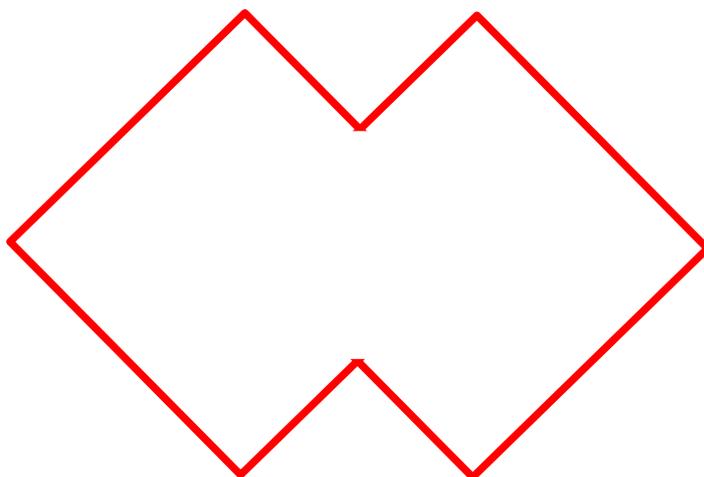
兩個由每條電阻值 R 的裸金屬線屈成的正方形，邊長為 a 。如下圖所示，它們有部分重疊相接觸，重疊部分是一個邊長為 $a/2$ 的正方形。現把這裝置放在一垂直它們平面向入的均勻磁場 B_0 範圍內。若把磁場在短時間內由 B_0 降至 0 ，問之後兩方形獲多大動量（momentum）？

在磁場熄滅過程中，方形的位移可忽略；自感

（inductance）和互感（mutual inductance）效應亦可忽略。



解答：



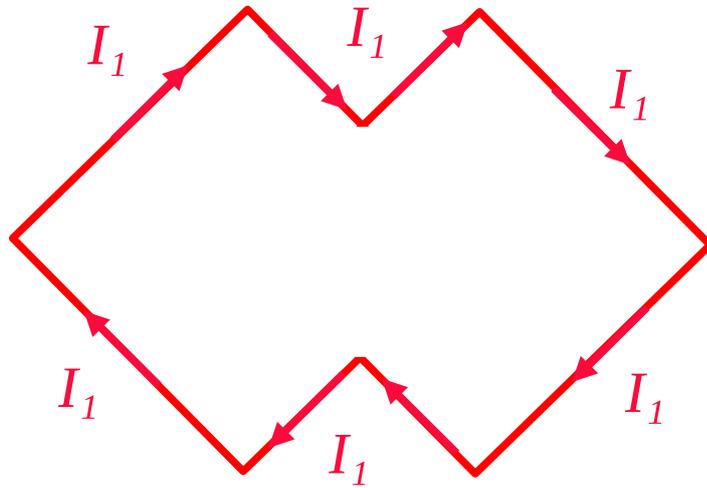
以上紅線範圍：

$$\text{面積} = 2a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{4}$$

$$\text{週界} = 6a$$

$$\text{電阻} = \frac{6a}{4a} R = \frac{3}{2} R \quad (4a \text{ 的電阻為 } R)$$

設外圈感生電流為 I_1 。



結合法拉第感應定律(Faraday's law of induction), $V = -A \frac{\Delta B}{\Delta t}$ 和歐姆定律(Ohm's law), $V = Ir$ 。

$$\therefore \frac{7a^2}{4} \frac{\Delta B}{\Delta t} = I_1 \left(\frac{3R}{2} \right)$$

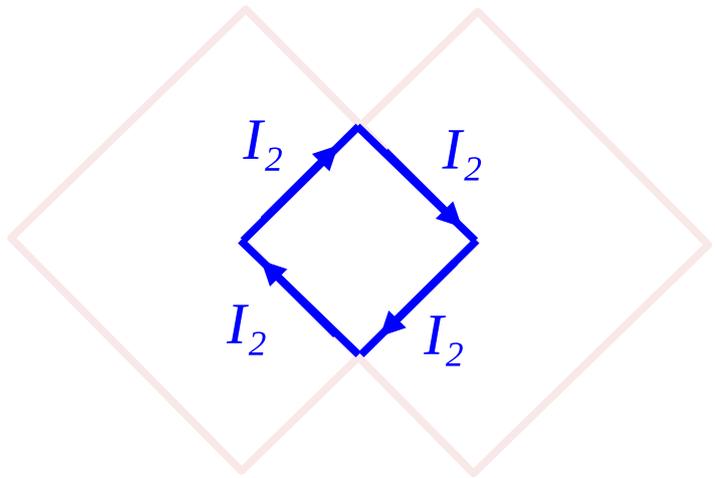
$$\therefore I_1 = \frac{7a^2}{6R} \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

內圈正方形：

$$\text{面積} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{週界} = 2a$$

$$\text{電阻} = \frac{2a}{4a} R = \frac{1}{2} R$$



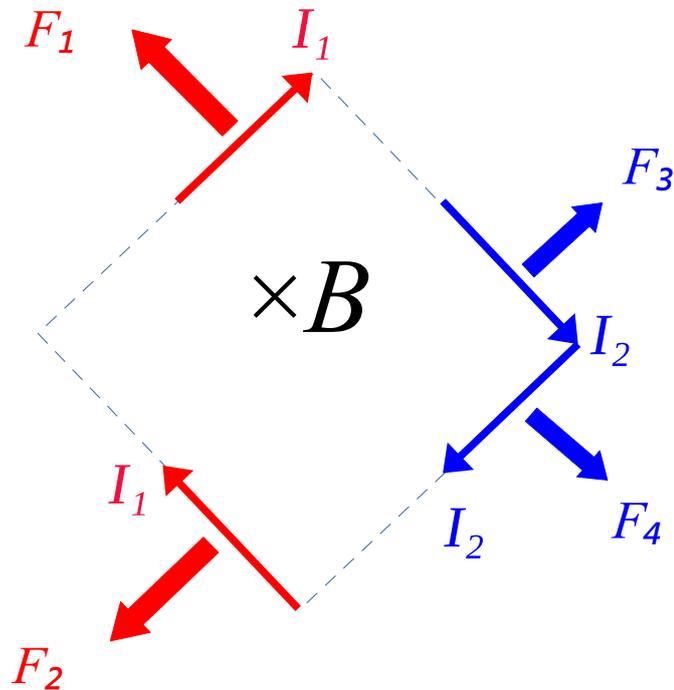
設內圈感生電流為 I_2 。

$$\therefore \frac{a^2}{4} \frac{\Delta B}{\Delta t} = I_2 \left(\frac{R}{2}\right)$$

$$\therefore I_2 = \frac{a^2}{2R} \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

電流 I 和外施加磁場 B 產生磁力 $F = BIL$

左正方形，會造成淨力的只是這 4 段線。



量值上， $F_1 = F_2 = I_1 \left(\frac{a}{2}\right) B = \frac{7a^3 B}{12R} \frac{\Delta B}{\Delta t}$ ，及

$$F_3 = F_4 = I_2 \left(\frac{a}{2}\right) B = \frac{a^3 B}{4R} \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \text{淨力(net force)} &= \sqrt{(F_1 - F_4)^2 + (F_2 - F_3)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{a^3 B}{R} \frac{\Delta B}{\Delta t} \quad (\text{向左}) \quad (1) \end{aligned}$$

右正方形情況相同，淨力是向右。

牛頓第二定律 $F=ma$ ，或

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} \quad (2)$$

由式（1）和式（2），

$$\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{a^3 B}{R} \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$\Delta(mv) = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{a^3 B}{R} \Delta B \quad (3)$$

上式右方的 ΔB 是 B 的改變，即是 $B_0 - 0$ （我們只取量值）。

而公式中單獨的 B 是磁場的瞬時值。我們假設磁場是線性變化(任何非常短時間的變化可視作線性)，這個單獨的 B 可取變化過程中 B 的平均值，即是 $(B_0 + 0)/2$ 。

最後，式（3）變成

$$(mv)_{\text{分離}} = \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{a^3 B_0^2}{R}$$

此亦即是左、右兩方形在磁場熄滅後互相分離的動量。

若同學懂微積分，式（3）可寫成

$$d(mv) = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{a^3 B}{R} dB, \text{ 或}$$

$$d(mv) = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{a^3}{R} d\left(\frac{B^2}{2}\right)。$$

然後兩邊積分得出答案。



作者：吳老師 (Chiu-King Ng)

<https://ngsir.netfirms.com>

<http://phy.hk>

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數