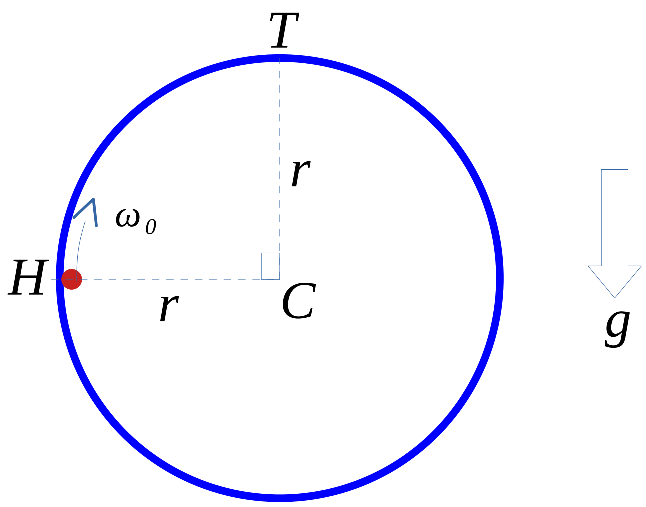
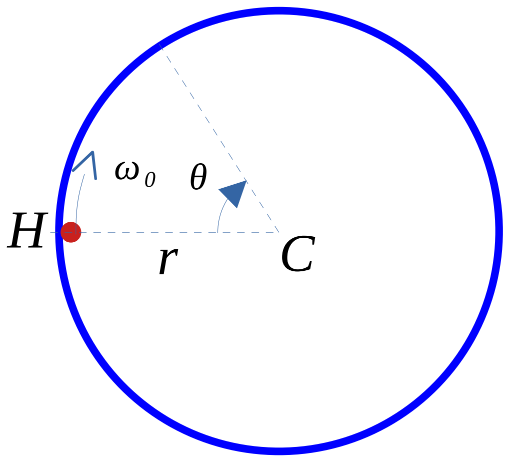
問題：



如上圖所示，小紅珠靠着垂直圓環的內壁作圓周運動。圓環平滑沒有摩擦，圓環半徑為 r。小紅珠的大小可忽略，其質量為 m。設小紅珠在圖中 H 位置的角速度（angular velocity）為 ω_0。

（a）證明在圓周上任意位置 θ（θ 的定義見下圖：順時針為正，逆時針為負），

小紅珠的角速度為 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{2g}{r}sin\theta}$。

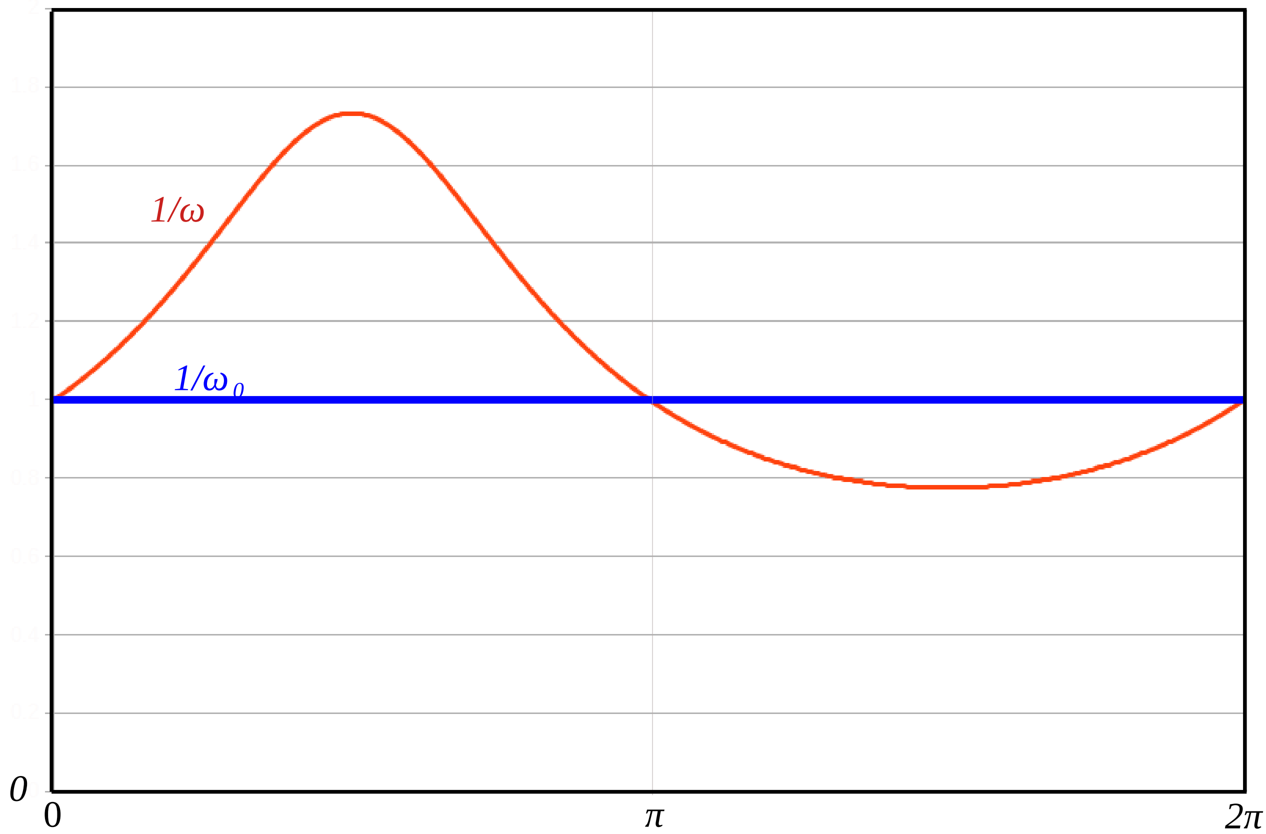


（b）若 ω_0 只讓小紅珠 僅 僅 可 以 完成這個垂直圓周運動，

（i） 證明 $\omega_0=\sqrt{\frac{3g}{r}}$。

（ii）下圖紅線顯示 $\frac{1}{\omega}$ 隨位置 θ 由 0 至 2π 的變化；

藍線則代表 $\frac{1}{\omega_0}$。

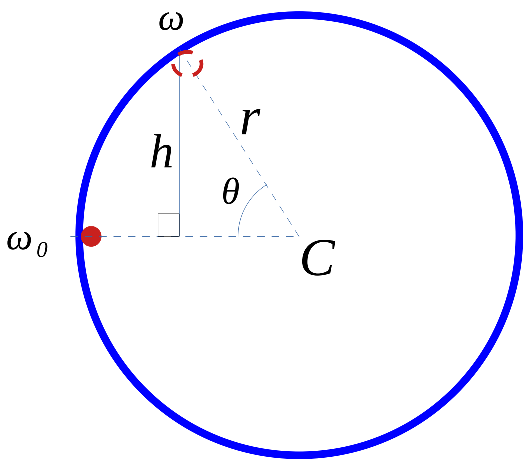


（1）藍線 $(\frac{1}{\omega_0})$下由 0 至 2π 的 面 積 代表甚麼？

（2）紅線 $(\frac{1}{\omega})$ 下由 0 至 2π 的面積和藍線 $(\frac{1}{\omega_0})$下由 0 至 2π 的面積，那一個看來是稍大一些？ 這有甚麼物理意義？

解答：

（a）



根據能量守恆，$KE + PE =$ 常數。所以，

$$\frac{1}{2}m(\omega_0 r)^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 + mgh。$$

$\because h = r\ sin\theta$

$$\therefore \frac{1}{2}m(\omega_0 r)^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 + mgrsin\theta。$$

所以，$\omega=\sqrt{\omega_0{}^2-\frac{2g}{r}sin\theta}$

（b）（i） 小紅珠能否完成圓周運動，關鍵是小珠在圓周的最高點能否符合“圓周運動的動力學要求”— 須有一外淨力擔任“向心力”這角色。

小紅珠在圓周的最高點受到的外力包括小珠的重量 mg（向下）和圓環施於它的法向力 R（向下），所以

$$mg + R=m\omega^2 r。$$

重量 mg 固定不變；R 可以按實際需要來“調整”，但總不能負（R 只可以向下，不能向上）。所以“小珠僅僅能夠完成圓周運動”（最小 ω）對應的就是 $R = 0$，即是

$g = \omega^2 r$ 。

把上式代入（a）的結果，$\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \frac{2g}{r}}$ （$\because \theta = \pi/2$）

最後求得 $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{r}}$ 。

（b）（ii）

（1） 藍線($\frac{1}{\omega_0}$)下由 0 至 2π 的面積

$= \frac{1}{\omega_0} \times 2\pi$

= 以 ω_0 轉一圈 2π 的時間（週期）

（2） 紅線($\frac{1}{\omega}$) 下由 0 至 2π 的面積稍 大 於藍線($\frac{1}{\omega_0}$)下由 0 至 2π 的面積，即是本問題小紅珠完成一圈的時間是比以 ω_0 轉一圈的時間稍長一些。換言之，小珠在上半部速度較慢，延後了的時間在速度較快的下半部也未能追回來。

這裏，我們考慮的是“小紅珠僅可以完成垂直圓周運動”，即是小珠在上半部的速度是能夠可以的最慢。

如果 $\omega_0 \gg \sqrt{\frac{3g}{r}}$，這兩面積會趨向相等嗎？

作者：吳老師 (Chiu-King Ng)

https://ngsir.netfirms.com

http://phy.hk

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數