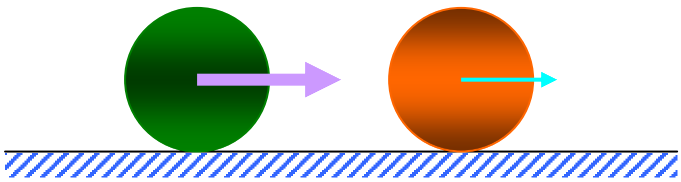
証明動能在完全非彈性碰撞損失最大

兩物體進行正碰撞 (head on collision) ：



1. 無論動能(kinetic energy)守恆否，總動量 (momentum)必定守恆 (conserved) 。

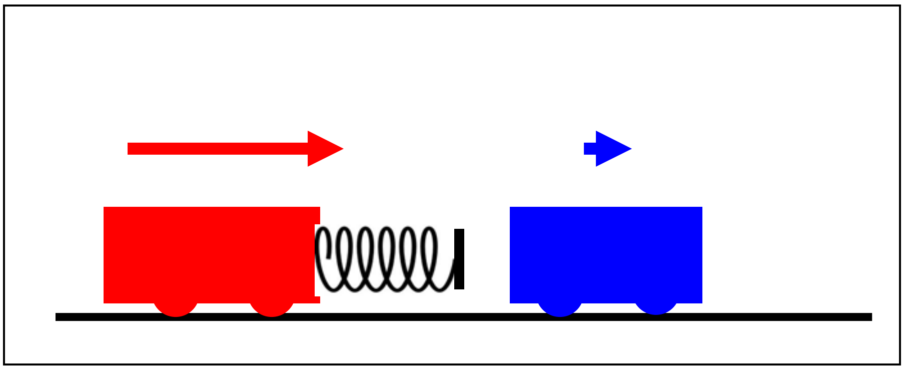
$m_1v_1 + m_2v_2 =$ 常數 C ....(1)

當動能(大約)守恆，碰撞稱為「彈性碰撞」(elastic collision) ；動能百分百守恆的，就稱為「完全彈性碰撞」(completely elastic collision) ；動能不守恆的，碰撞稱為「非彈性碰撞」(inelastic collision) ，其中不守恆得最厲害的，就稱為「完全非彈性碰撞」(completely inelastic collision) 。

當兩物體碰撞後速度相同，此碰撞就是完全非彈性，亦即是在動量守恆的規範下動能損失最多的情況。

2. 先以一個特例作證明

想像兩小車相撞，它們之間安裝一個彈簧。



要發生碰撞，紅車必先要追及藍車。

兩車剛接觸時，紅車速度 ＞ 藍車速度，所以彈簧長度不斷壓縮。彈簧的勢能增加，即是兩小車的總動能不斷減少 (總機械能守恆)。

紅車受到向後的力作用，所以紅車減速； 藍車受向前的力作用，所以藍車加速。 兩車的速度趨向相同。
若仍然是紅車速度 ＞ 藍車速度，那彈簧的長度仍繼續減少（彈性勢能增加）。即是兩車的動能仍繼續減少。

紅車繼續減速，藍車繼續加速，最後必然是
紅車速度 ＝ 藍車速度，
然後再變成紅車速度 ＜ 藍車速度。

在轉為 紅車速度 < 藍車速度後，彈簧長度增加，即是彈簧勢能減少，小車的總動能不斷增加。

即是說，在紅車速度 = 藍車速度 之時，彈簧長度最短。那時，彈性勢能最大，兩小車的總動能必是最小。

3. 數學直接証明：

兩物體總動能 $E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ **..............(2)**

把 **(1)** 代入 **(2)** ，消去 v_2，

$$2E_k = m_1v_1^2 + m_2\left(\frac{C - m_1v_1}{m_2}\right)^2$$

整理後，得

$$2E_K = \frac{m_1}{m_2}(m_1 + m_2)v_1^2 - 2C\left(\frac{m_1}{m_2}\right)v_1 + \frac{C^2}{m_2} \quad \text{................ (3)}$$

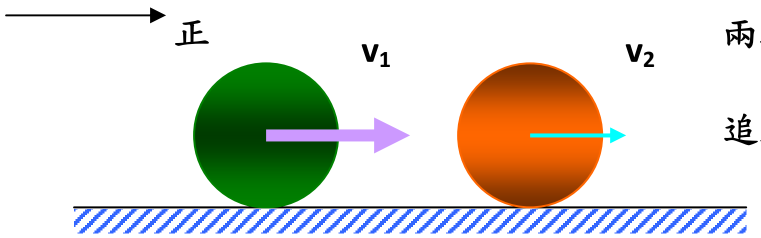
我們知道當 $x = -\frac{b}{2a}$， 二次函數 $ax^2 + bx + c$ **($a > 0$)** 的值最小。

從（3），得當 $v_1 = \frac{C}{m_1 + m_2}$， E_k 最小。

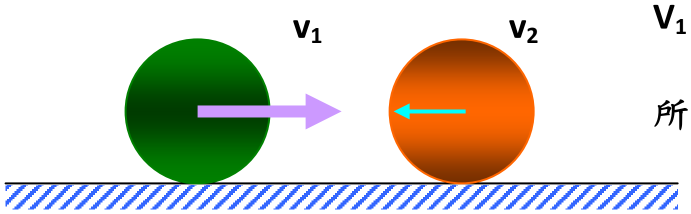
代 $v_1 = \frac{C}{m_1 + m_2}$ 入(1)，亦得 $v_2 = \frac{C}{m_1 + m_2}$。即 $v_1 = v_2 = \frac{C}{m_1 + m_2}$ 的時，總動能最小。

4. 另一個看似複雜的証明

若一個物體要追及另一物體，發生碰撞，總是以下的其中一款：

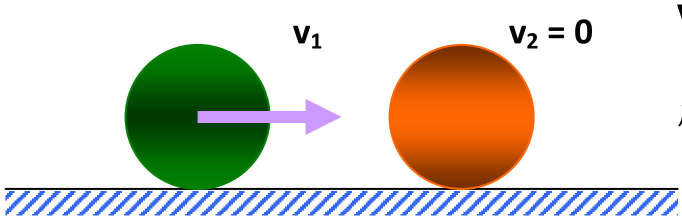


兩球同方向，要後面的球追及前面，必須 $V_1 > V_2$



V_1 是正， V_2 是負

所以 $V_1 > V_2$

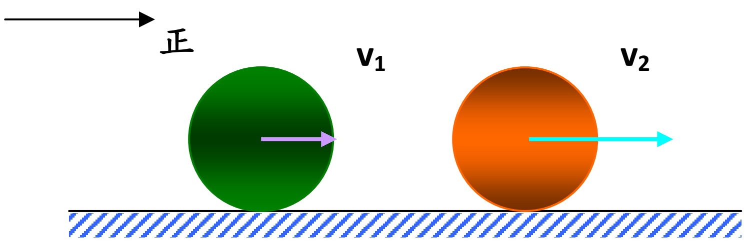


V_1 是正， V_2 是零

所以 $V_1 > V_2$

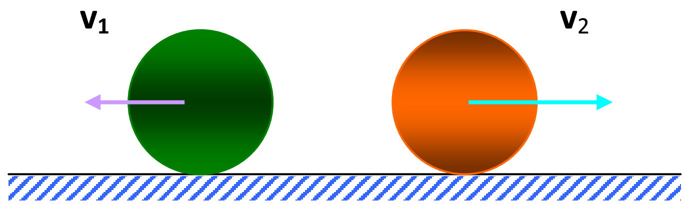
要碰撞，必須是 $V_1 > V_2$。

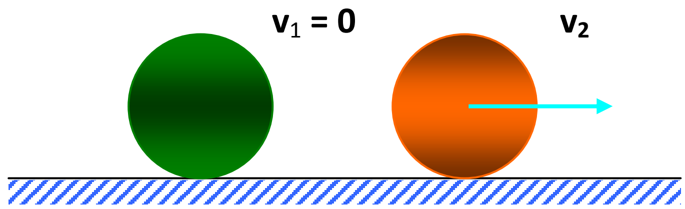
完成碰撞後(分離)，亦必是以下的其中一款：

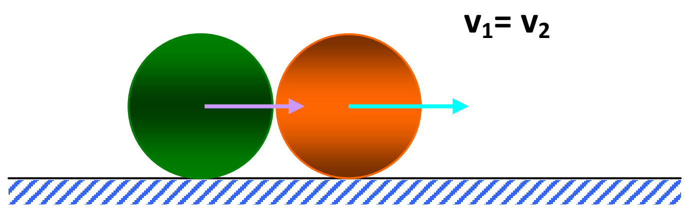


完成碰撞，兩球分離

$V_1 < V_2$







碰撞後分離，必須是 $V_1 \leq V_2$

物體 1 撞去物體 2

碰撞前 $V_1 > V_2$

碰撞後 $V_1 \leq V_2$

……(4)

碰撞過程，基本就是由 $v_1 > v_2$ 變成 $v_1 \leq v_2$

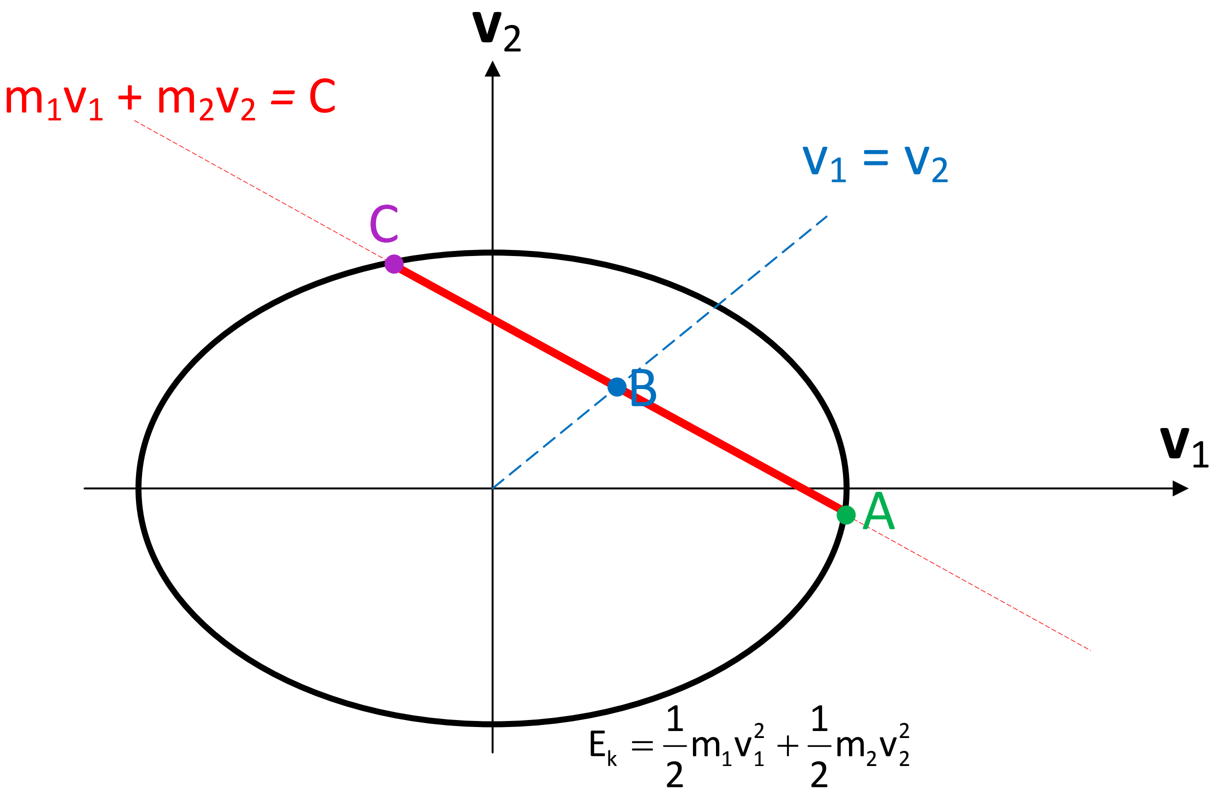
若把

$$m_1v_1 + m_2v_2 = C \qquad \text{.........} \ (1)$$

和

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad \text{.........} \ (2)$$

劃在座標 **(v_1, v_2)** 上，前者為直線，後者為橢圓形 **(ellipse)** 。



上圖，

- 在碰撞時，動量守恆，所以在任何時刻，**(v_1, v_2)** 必在紅(實) 線上。
- 點 **B** 是紅線上的 **$v_1 = v_2$**。
- 在碰撞(**1** 撞向 **2**) 中，**$V_1 > V_2$** 轉化為 $V_1 \leq V_2$ 。 所以碰撞就是從 **B** 的右方紅線轉入 **B** 的左方紅線(包括 **B**)。

- 碰撞前的總動能為 E_K，故點 A 是剛發生碰撞時的(v_1, v_2) 。
- 若是完全彈性碰撞，那點 C 就是最後它們分離時的(v_1, v_2) 。

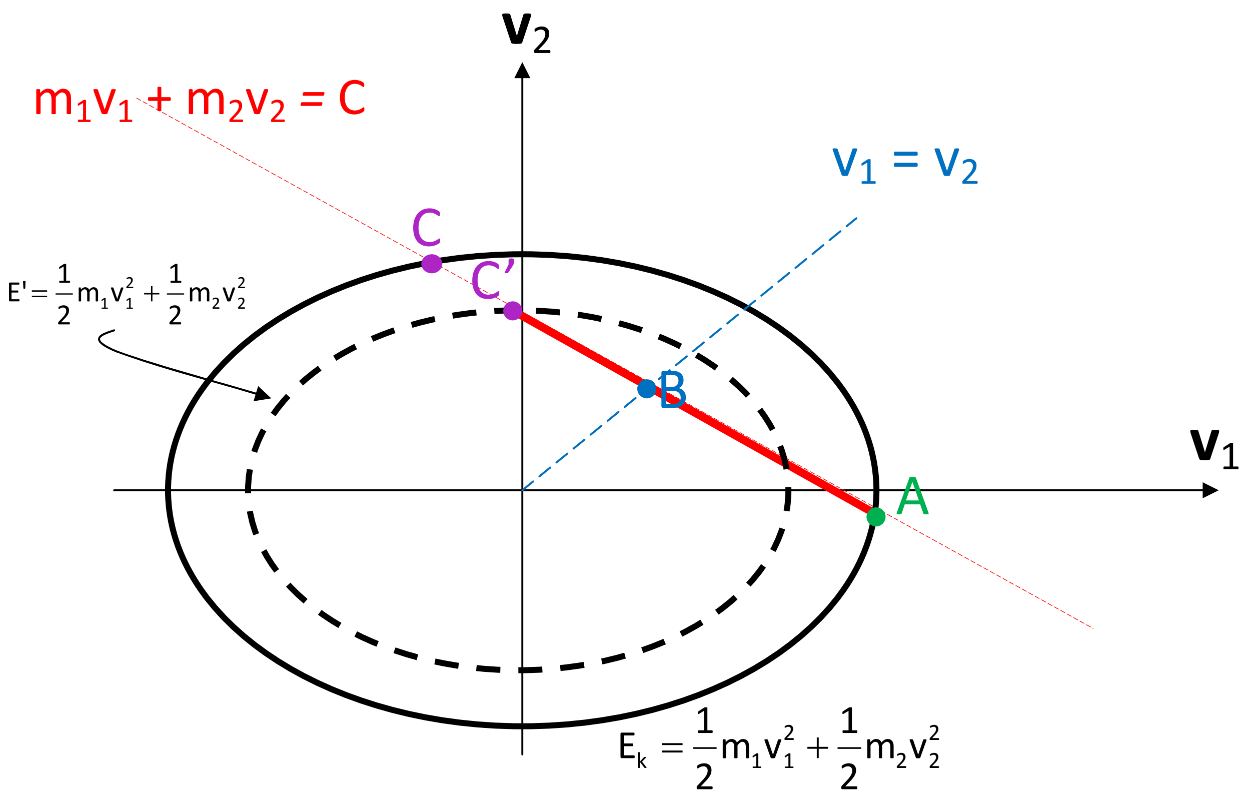
> 若是完全彈性碰撞，(v_1, v_2) 從點 A 開始，沿紅線上，經過點 B，然後到達點 C ，那就完成了碰撞。

- 若是非彈性碰撞，那兩球的 KE 損耗了。設

$$E' = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$ 其中 E' 為分離時總 KE，$E' < E_K$

橢圓形的兩截距分別是 $\sqrt{\frac{2E'}{m_1}}$ 和 $\sqrt{\frac{2E'}{m_2}}$ 。

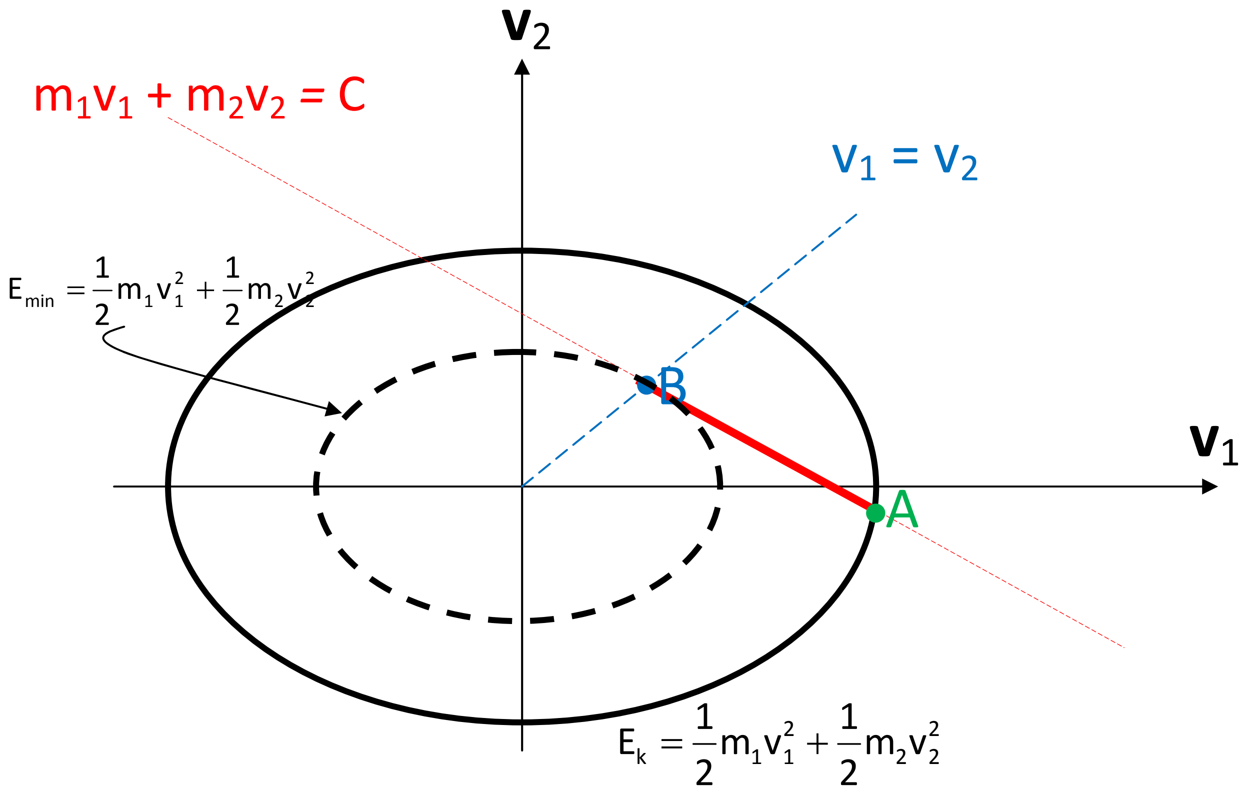
隨著 E' 減少，橢圓形就以 (0,0) 為中心，形狀不變地縮小。



縮小後的橢圓形與 BC 段的相交點是 C' ，即是說碰撞由點 A

開始（原本動能是 E_K），分離時是點 C'(最後動能是 E') 。

- E' 的容許最少值 (E_{min})，那就是把橢圓縮小，但仍可與 BC 段（包括 B）有相交點。用一些數學，就可證明把橢圓縮小，最後離開 BC 段的就是以紅線為橢圓在 B 點(v_1=v_2) 的切線。



紅線的斜率 (slope) = $-\frac{m_1}{m_2}$

把公式 $E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ 兩邊對 v_1 微分，求得

$$\frac{dv_2}{dv_1} = -\frac{m_1v_1}{m_2v_2}$$

若紅線相切於橢圓，那必為 $v_1 = v_2$。

碰撞剛發生時，動能是 E_K，(v_1, v_2) 是點 A。

然後沿紅線 (因動量必須在任何時刻守恆) 由 A 走向 B 。

在碰撞發生當中，兩物體的動能會轉為其他能量，例如彈性勢能。

在 AB 之間$(v_1 > v_2)$，物體未能分離。

在 B$(v_1 = v_2)$ 和 B 之後$(v_1 > v_2)$，碰撞可完成。

若在點 C 分離，即是先前失去的動能可全部變回動能，這是完全彈性碰撞。

若是非彈性碰撞，那先前失去的動能不能全部變回動能，那分離的 (v_1, v_2) 就在 B 與 C 之間的 C’ 點。

若分離時的動能為容許的最小值(E_{min})，那必然就在 B $(v_1 = v_2)$ 完成了整個碰撞，這就是完全非彈性碰撞。

吳老師 (Chiu-king NG)