

這是一個常見的電磁感應(EM induction)例子。當金屬棒 MN 受恆力(uniform force) F_0 作用而加速並切割(cuts across) 磁場 B 時，它的兩端會產生感生電壓(induced emf)。連接的燈泡會因此發亮。

**問題：若把磁場增強，燈泡會
最後比先前**

A. 亮一些

B. 暗一些

C. 一樣光亮？

學了電磁感應的同學都知道金屬棒切割磁場時產生的電動勢

$$\varepsilon \propto B$$

所在當 B 增強， ε 大了，燈泡就應該更亮明。但是，除了 B ， ε 也是與 v 有關的。

當金屬棒切割強磁場，它稍移動時就會受很大的 magnetic resistive force 作用。故此金屬棒在強磁場之下(假設電路閉合)不容易被拖走動。除非將外力同步增強，否則金屬棒最終只可以低速移動。

究竟是磁場強了的效應(令 ε 增加)大、還是速度低了(令 ε 減少)的效應大？

設：

F_0 = 固定量值外力

R = 燈泡內阻

m = 金屬棒 MN 質量

L = 金屬軌 CD 與 EF 之間的距離

所有金屬和導線的內阻均為零

涉及公式：

- 當長度 L 的金屬棒以速度 v 切割磁場 B ，感生電壓 (induced emf) $\varepsilon = BLv$
- 電路電流 $I = \varepsilon/R$
- 燈泡功率(power) $P = \varepsilon^2/R$
- 電流 I 通過放在磁場 B 的導線，導線受磁力 BIL 作用。

初步分析：

當有感生電流 I 流過金屬棒 MN 時，MN 除受 F_0 作用外，也受磁力 $F = BIL$ 作用。根據楞次定律 (Lenz's law)，此磁力必與 F_0 方向相反。

1. 最後，當金屬棒達至勻速時，淨力為零。

$$F_0 = BIL \quad \dots\dots\dots(1)$$

根據 (1)，當 B 增強，感生電流 I 就會減少 (F_0 和 L 均是常數)。電流 I 減弱，燈泡就變得暗了！

2. 因為磁力對電荷不作功，所以燈泡消耗的能量全來自外力 F_0 作的功。

$$F_0 v = \text{燈泡功率}$$

如磁場強了，金屬棒必然比之前行得較慢 (electromagnetic damping)。 F_0 不變。所以，燈泡功率因磁場強了而下降。

本題答案是 (B) 暗一些

深入分析：

全屬棒 MN 的運動方程

$$F_0 - BIL = m \frac{dv}{dt} \dots\dots\dots(2)$$

其中電流 $I = \frac{BLv}{R} \dots\dots\dots(3)$

[假設電路的自感(self-inductance) 可忽略]

代 (3) 入 (2)，得

$$F_0 - \frac{B^2L^2}{R}v = m \frac{dv}{dt} \dots\dots\dots(4)$$

方程 (4) 是一條簡單的微分方程。

此類微分方程屢見於高中物理，例如

- RC 的直流充電過程
- 物體受正比於速度的空氣阻力下墜

若初始條件為 $t = 0$ ， $v = 0$ ，則方程 (4) 的解是

$$v = v_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \dots\dots(5)$$

其中 $v_0 = \frac{F_0 R}{B^2 L^2} \dots\dots(5.1)$

和

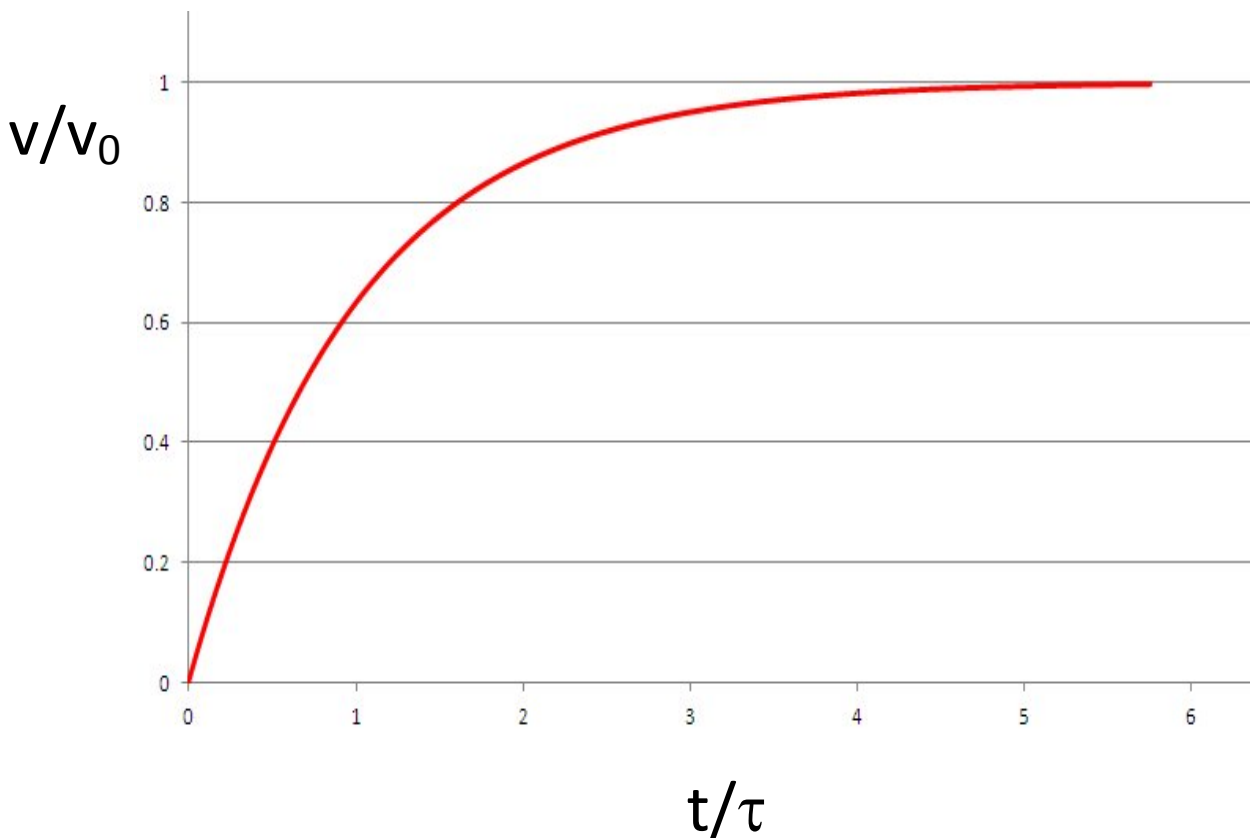
$$\tau = \frac{R}{m B^2 L^2} \dots\dots(5.2)$$

v_0 是終端速度 (terminal velocity)；而 τ 是時間常數 (time constant)。

v 由 0 升至 $v_0/2$ 的時間是半衰期 (half-life)

$$t_{1/2} = \tau \ln 2。$$

v 隨 t 的變化圖像：



感生電壓

$$\varepsilon = BLv$$

$$= \varepsilon_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{.....(6)}$$

$$\text{其中 } \varepsilon_0 = BLv_0 = \frac{F_0 R}{BL} \quad \text{.....(6.1)}$$

為甚麼把磁場增強，燈泡會最
後比先前暗了？

1. “最後光亮” 是指到達了穩定狀態(steady state) 時情況，即 $v = v_0$ 、 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 。
2. 因為 $v_0 \propto \frac{1}{B^2}$ (參看 5.1) 和 $\varepsilon_0 = BLv_0$
3. 所以，把 B 增強，金屬棒的終端速度 v_0 受的影響會更大。

例，磁場 B 增加 10%， B 變成 $1.1B$

但 v_0 會變為 $v_0/1.1^2 = 0.83v_0$ 。

ε_0 只是原來的 $1.1 \times 0.83 = 0.9$ 倍！

磁場增強，燈泡變暗；磁場減弱，燈泡變光。若把磁場減弱至零，那豈不是……??

須知，以上結論是指金屬棒在達到穩定狀態 ($t \gg \tau = \frac{R}{mB^2L^2}$) 時結果。若 $B = 0$ ，那穩定狀態永遠也達不到。事實是，若 $B = 0$ ，燈泡就未曾亮過，金屬棒一直在加速 (假設路軌無限長)， v_0 永遠也不會出現。

最後，請同學留意

這個答案「磁場增強，燈泡變暗」只是適合「拉金屬棒的外力固定不變」這前提。

若問題改為「金屬棒以一固定速度切割磁場」，即是不時調整外力，使它與磁力常保持抵消。那時的答案當然是「磁場越強，燈泡越光亮」。

吳老師 (Chiu-king Ng)

<http://ngsir.netfirms.com> (物理勿勿理)