

以銀行的一項儲蓄計劃來比擬距離、速度和加速度三者的關係，並由此說明加速度的單位為甚麼是“ m s^{-2} ”。



(網上圖片)



筆者從事中學物理教學多年，深深體會當初學者第一次接觸“加速度”時，很多都會弄不清楚它是甚麼。“距離”和“速度”尚好，因為它們是“看得見”的：物體行了多遠就是距離；物體行得多快就是速度。但是，“加速度”是甚麼？這總要老師花費一些脣舌去解釋。在這方面，筆者總喜歡找一些合適的日常生活例子，以“比擬”的方法把“加速度”帶出場。但是，日常生活中有着如 d 、 v 和 a 這三層關係的例子也實在不多。本文用上的“儲蓄收息”是筆者常用的其中一個生活例子。至於這種以比擬為方法的教學策略是否奏效，那有待教育專家來研究了。

本文討論的是勻加速(加速度是一常數)，以下不再特別聲明。



計劃 A 陳先生把一筆錢固定放在銀行賺取利息。銀行給予他的利息是“**每年 1000 元**”（利息率一般是一個百分比。這裏，我們力求簡單，利率是一個實數金額）。這樣，陳先生預計往後收到的利息是這樣：

時間	開始	1 年後	2 年後	3 年後	4 年後	5 年後
累積利息	0 元	1000 元	2000 元	3000 元	4000 元	5000 元

明顯， t 年後陳先生收到的總利息是 $1000 \times t$ 元。

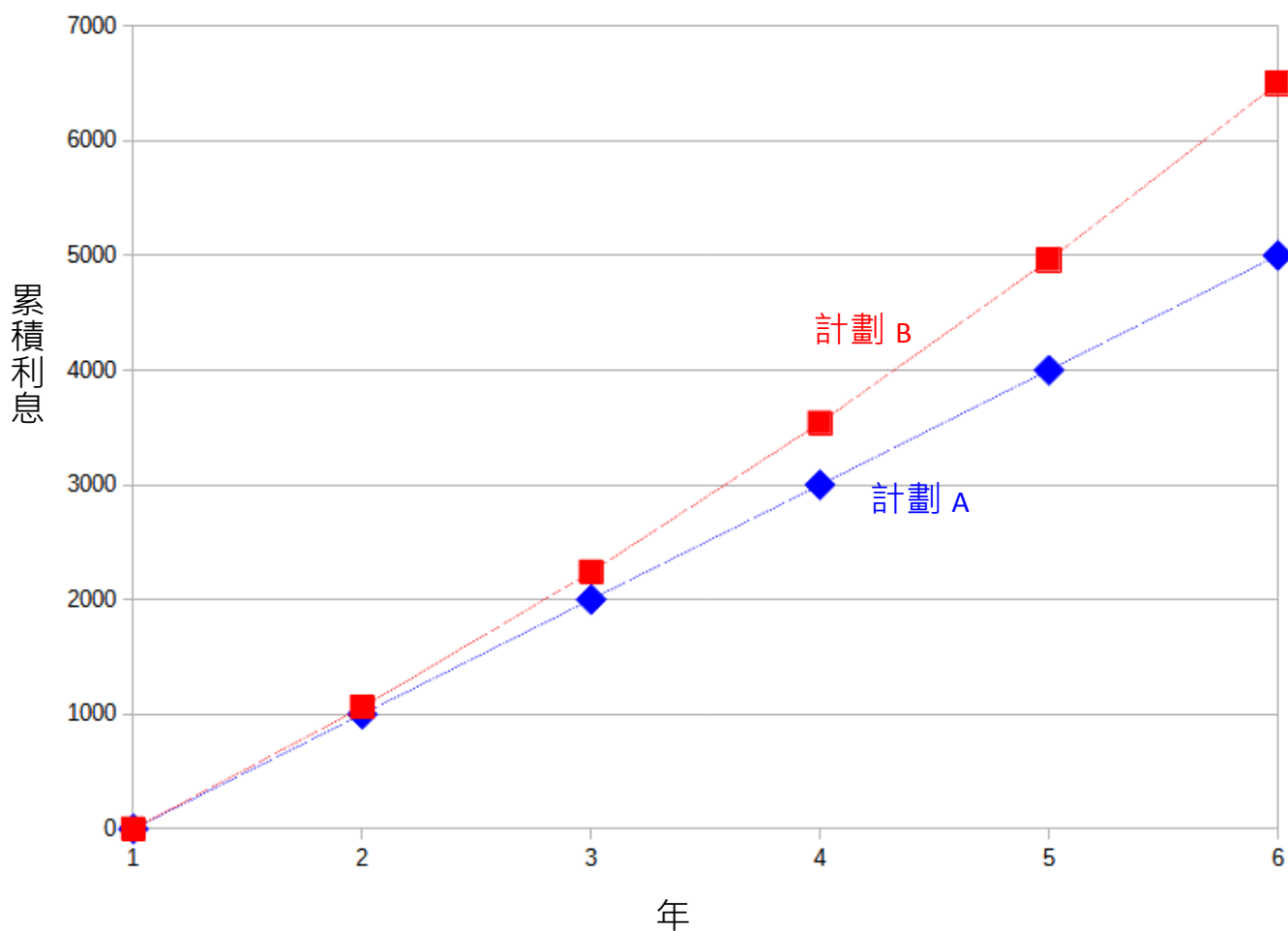
計劃 B 但陳先生不太滿意。經商議後，銀行給了陳先生另一個更優惠的計劃：原來的利息率“**每年 1000 元**”只是開始，在之後**每年的年中**都會在當時的利息率上再**增加**“**每年 120 元**”（記住，這只是利息率的每年增加幅度，不是新的利息率）。此計劃是每週年的第一天派息（陳先生取走）。如此，陳先生的賬目會是這樣：

時間	開始當天	1 年後第一天	2 年後第一天	3 年後第一天	4 年後第一天	5 年後第一天
利息率	每年 1000 元	$1000 + 120$ = 每年 1120 元	$1120 + 120$ = 每年 1240 元	$1240 + 120$ = 每年 1360 元	$1360 + 120$ = 每年 1480 元	$1480 + 120$ = 每年 1600 元
上年度利息	0	$1000 \times 1 + 120 \times 0.5$ = 1060 元 (註)	$1120 \times 1 + 120 \times 0.5$ = 1180 元	$1240 \times 1 + 120 \times 0.5$ = 1300 元	$1360 \times 1 + 120 \times 0.5$ = 1420 元	$1480 \times 1 + 120 \times 0.5$ = 1540 元
累積利息	0	1060 元	$1060 + 1180$ = 2240 元	$2240 + 1300$ = 3540 元	$3540 + 1420$ = 4960 元	$4960 + 1540$ = 6500 元

註：在上年度，利息“**每年 1000 元**”維持了一整年，所以這部份收取的利息為“ **1000×1 元**”。

在上年度的年中間，利息率亦增加多了“**每年 120 元**”。因為由於只是過了半年，所以這部份收取的利息為“ **120×0.5 元**”。

每次“上年度利息”的計法相同。



上圖表示陳先生在兩計劃 A 和 B 之下隨年份增加的累積利息。

計劃 A → 穩定收息(速度)，沒有加速，此謂之“勻速” (uniform velocity)
距離(累積收息)直線增加

計劃 B → 有加速， 距離(累積收息)增加得較快

表上的數字可以用以下公式直接求得（若讀者不嫌麻煩，可自行證明）：

$$t \text{ 年後的 利息率} = \text{每年 } 1000 + 120 \times t \text{ 元}$$

$$t \text{ 年後的 累積利息} = 1000 \times t + \frac{1}{2}(120 \times t^2) \text{ 元}$$



對比於物體運動

一物體以初速 u ，加速度 a 行走的距離 d 。

在陳先生的儲蓄 B 計劃，

* 起始的利息率 “每年 1000 元” 對應的就是 初速 u 。

* 開始後每一年的新利息率 對應的就是 物體的新速度 v 。

* 每年利息率的增加幅度 “每年 120 元” 對應的就是 加速度 a 。

* 由開始日算起的 “累積利息” 對應的就是 物體離開起始點的距離 d 。

單位

* 最開始的利息率是 “每年 1000 元”，即可寫成 “1000 元/年”。

* 每年利息率的增加幅度是 “每年 120 元”

⇒ 每年利息率的增加幅度是 “120 元/年”

⇒ 利息率的增加幅度是 “120 元/年/年”

物體運動多時不是以 “年”，而是以 “秒”（second 或 s ）為時間的基礎單位。

物體運動更不會以去 “元” 去表示距離，而是以 “米”（meter 或 m ）為長度的基礎單位。

陳先生的儲蓄 B 計劃	物體運動
累積利息（單位是 元）	總行走距離 d （單位是 m ）
起初的利息率（1000 元/年）	初速度 u （單位是 $m/s = m s^{-1}$ ）
利息率的增加幅度（120 元/年/年）	加速度 a （單位是 $m/s/s = m/s^2 = m s^{-2}$ ）

“儲蓄收息”比擬中為甚麼有“年中加息率”這操作？

上述“儲蓄收息”唯一與物體運動不相同的地方是：

利息率（陳先生的 **Plan B**）是在每年的年中間這個特定時間點才（突然）增加，但在物體的真實加速運動中，**速度是連續不斷地增加**的。

譬如現在的速度是 6 m s^{-1} 和 $a = 2.5 \text{ m s}^{-2}$ 。那之後物體的速度都是連續不斷均勻地增加。

但無論如何，速度在未來的 1 秒內會累積增加 2.5 m s^{-1} ，所以 1 秒後物體的速度是 $6 + 2.5 = 8.5 \text{ m s}^{-1}$ 。

換言之，公式“ $v = u + at$ ”和“ $d = ut + \frac{1}{2}at^2$ ”中的 t 不須要是整數，是任何的正小數均可。

為了“儲蓄收息”計劃 **B** 計算出的“累積利息”與物體運動的距離 d 吻合，我們採用“年中加息”這操作，其不過是利用“拉上補下”以達到與“連續不斷均勻地增加”的結果相同。



加速度 $a = 18 \text{ m s}^{-2} = 18 \text{ m s}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ，即是 s^{-1} (每秒)，速度就會增加 18 m s^{-1} 。

如果 $a = 4 \text{ km s}^{-1} \text{ h}^{-1}$ ，意思是 _____

如果 $a = 6 \text{ m. p. h. per day}$ ，意思是 _____

如果 $a = 0.6 \text{ mm ms}^{-1} \text{ min}^{-1}$ ，意思是 _____ (ms : millisecond)

練習：

(a) 一物體現在的速度是 1.3 m s^{-1} ，加速度是 $a = 8.6 \text{ m s}^{-2}$ 。

那 1 秒之後，物體的新速度是 _____。

(b) 一物體現在的速度是 55 m s^{-1} ，加速度是 $a = 88 \text{ m s}^{-1} \text{ min}^{-1}$ （這個單位少見，但其意義甚明確）。

那 1 分鐘之後，物體的新速度是 _____。

(c) 一物體現在的速度是 10 m s^{-1} ，加速度是 $a = 0.9 \text{ m s}^{-2}$ 。

那 1 秒之後，物體的新速度是 _____。

那 5.8 秒之後，物體的新速度是 _____。

那 5.8 秒之後，物體離開起始點的距離是 _____。



作者：吳老師 (Chiu-King Ng)

<https://ngsir.netfirms.com>

<http://phy.hk>

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是 23 之後的質數