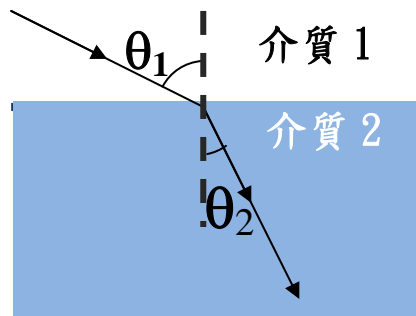


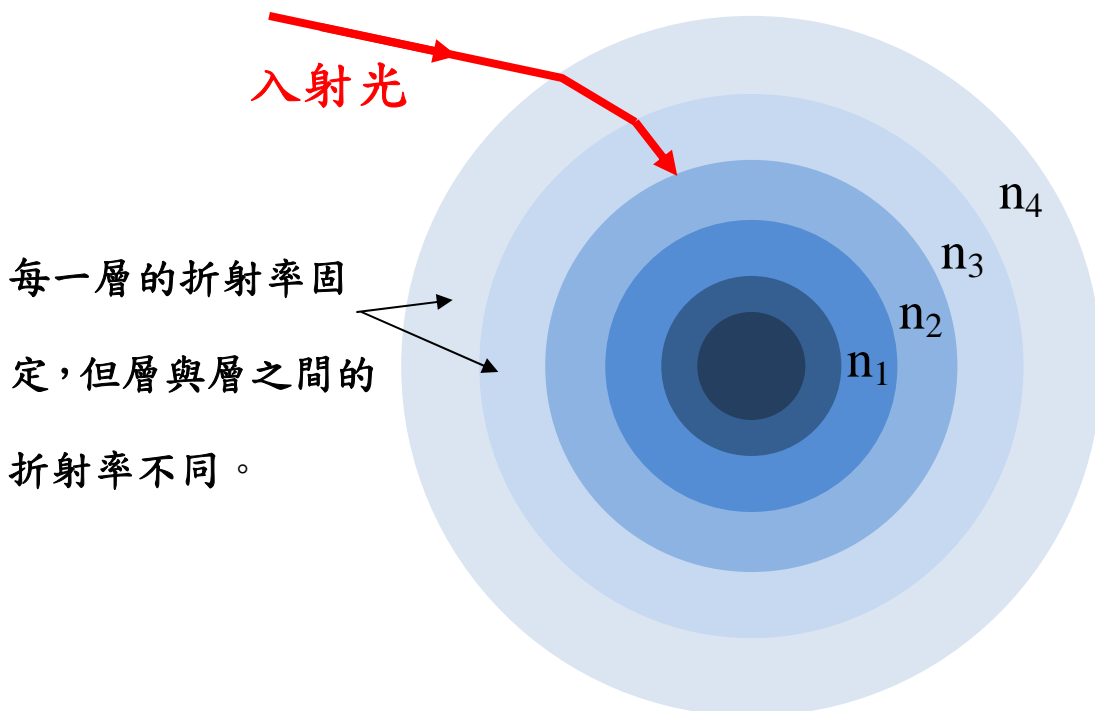
同心殼層介質折射公式推導

大家熟悉的折射公式：

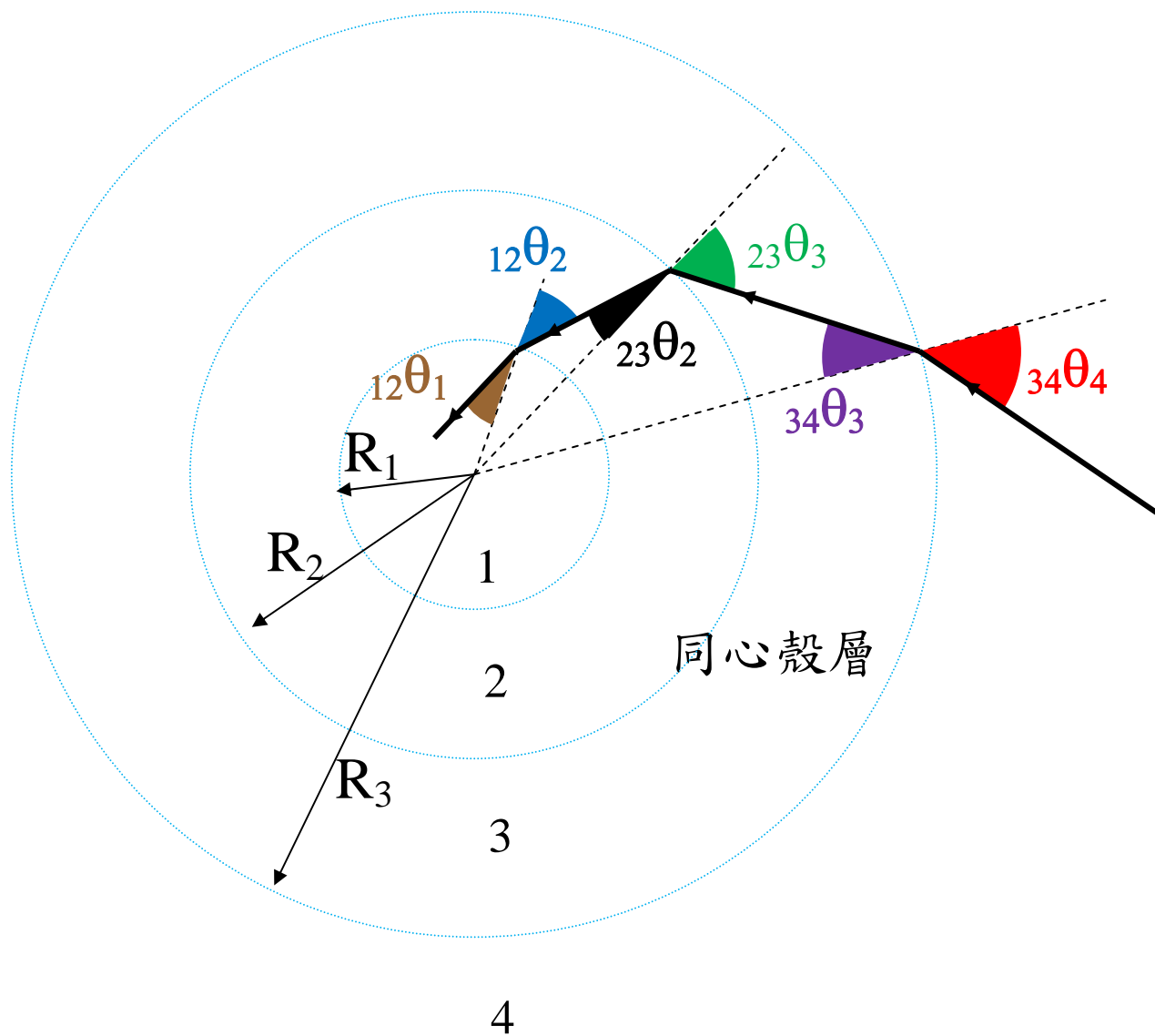


$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

你可以把公式推廣適用於不同折射率的同心殼層介質嗎？



我們考慮下圖。



我們定義角度

$${}_{ij}\theta_i$$

在介質 i 與 j 接壤的界面，

在 i 那邊的角

(1) 同一界面兩邊的角度，即是

${}_{12}\theta_1$ 和 ${}_{12}\theta_2$ 、 ${}_{23}\theta_2$ 和 ${}_{23}\theta_3$ 、
 ${}_{34}\theta_3$ 和 ${}_{34}\theta_4$ 。

應用基本的 snell's law，

$$n_1 \sin_{12}\theta_1 = n_2 \sin_{12}\theta_2 \quad \dots\dots\dots(1a)$$

$$n_2 \sin_{23}\theta_2 = n_3 \sin_{23}\theta_3 \quad \dots\dots\dots(1b)$$

$$n_3 \sin_{34}\theta_3 = n_4 \sin_{34}\theta_4 \quad \dots\dots\dots(1c)$$

在同一界面兩邊的角度的半徑 R (指由中心至該界面的距離) 相同。

在 (1a) 的兩邊乘 R_1 ；在 (1b) 的兩邊乘 R_2 ；在 (1c) 的兩邊乘 R_3 。得

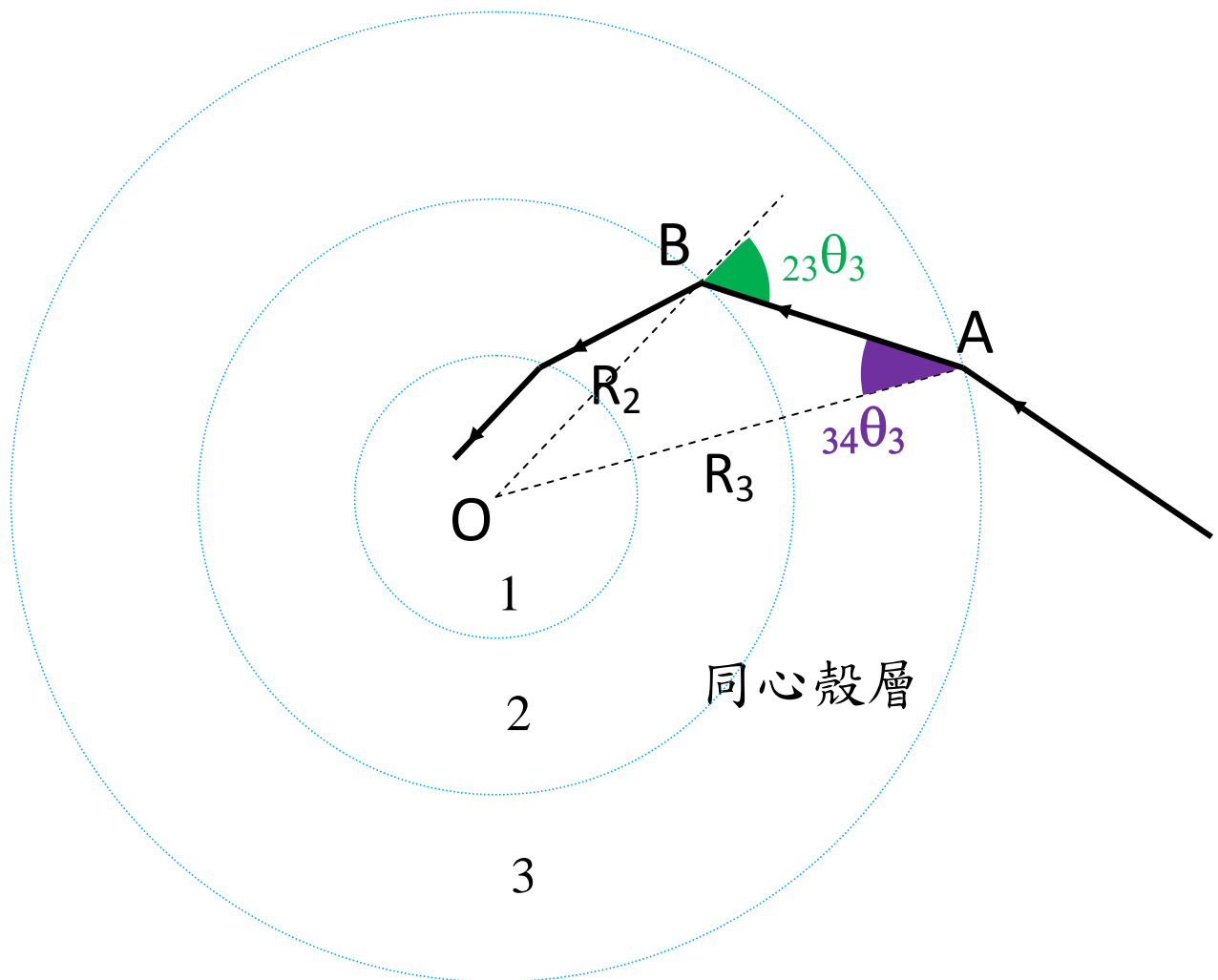
$$n_1 R_1 \sin_{12}\theta_1 = n_2 R_1 \sin_{12}\theta_2 \quad \dots\dots\dots(2a)$$

$$n_2 R_2 \sin_{23}\theta_2 = n_3 R_2 \sin_{23}\theta_3 \quad \dots\dots\dots(2b)$$

$$n_3 R_3 \sin_{34}\theta_3 = n_4 R_3 \sin_{34}\theta_4 \quad \dots\dots\dots(2c)$$

(2) 同一介質內的兩個角度。

我們以介質 3 的 ${}_{23}\theta_3$ 和 ${}_{34}\theta_3$ 為例



在 $\triangle OAB$ ， $AP = R_3$ 、 $OB = R_2$ 、 $\angle OAB = {}_{34}\theta_3$ 和
 $\angle OBA = 180^\circ - {}_{23}\theta_3$

利用 **sine formula** ,

$$\frac{\sin\angle OBA}{OA} = \frac{\sin\angle OAB}{OB}$$

i.e.
$$\frac{\sin(180^\circ - {}_{23}\theta_3)}{R_3} = \frac{\sin {}_{34}\theta_3}{R_2}$$

或
$$\frac{\sin {}_{23}\theta_3}{R_3} = \frac{\sin {}_{34}\theta_3}{R_2}$$

得

$$R_2 \sin {}_{23}\theta_3 = R_3 \sin {}_{34}\theta_3$$

因屬同一介質 3 內，把上式兩邊乘 n_3 。

$$n_3 R_2 \sin {}_{23}\theta_3 = n_3 R_3 \sin {}_{34}\theta_3 \quad \dots\dots(3a)$$

同樣地，我們得

$$n_2 R_1 \sin {}_{12}\theta_2 = n_2 R_2 \sin {}_{23}\theta_2 \quad \dots\dots(3b)$$

我們把 (2a)、(2b)、(2c)、(3a) 和 (3b) 連在一起，得

$$\begin{aligned} n_1 R_1 \sin_{12} \theta_1 &= n_2 R_1 \sin_{12} \theta_2 \\ &= n_2 R_2 \sin_{23} \theta_2 = n_3 R_2 \sin_{23} \theta_3 \\ &= n_3 R_3 \sin_{34} \theta_3 = n_4 R_3 \sin_{34} \theta_4 \\ &\dots (4) \end{aligned}$$

式 (4) 的意義 — 在任何一个折射點，

$$nR \sin \theta = \text{常數}$$

在該點， θ 處於的那邊
介質折射率

圓心至該點半徑

所以，

同心殼層介質折射公式是

$$nR \sin\theta = \text{常數}$$

它是我們熟悉的“ $n \sin\theta = \text{常數}$ ”的引伸。

作者：吳老師 (Chiu-king Ng)

物理勿勿理 <http://ngsir.netfirms.com>