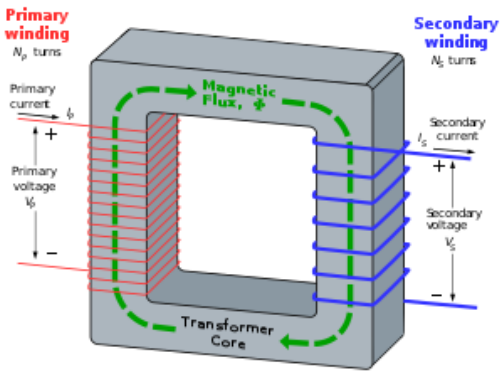
中學課程教授的「理想變壓器」（電壓正比於匝數；電流反比於匝數）其實是一個 "no-flux transformer"，即是它鐵芯內的磁場在甚麼時刻皆零。 你覺得奇怪嗎？

另外，我們熟悉的原電流(primary current) 並沒有通過電磁感應（electromagnetic induction）來產生副電流(secondary current)。這點你知道嗎？

(I) 中學學習的「理想變壓器」



圖片來自 https://en.wikipedia.org/wiki/Transformer

假設變壓器沒有漏磁、導線沒有電阻、鐵芯沒有渦電流 (eddy current) ... 等等。即是完全沒有能量損耗，故曰變壓器「理想」。

變壓器的基本運作原理是法拉第電磁感應定律 (Faraday's law of induction)。假設繞着鐵芯的磁通量 (magnetic flux = BA) 為 Φ；因為沒有漏磁，所以原線圈和副線圈兩邊的磁通量相同，都是 Φ。運用法拉第電磁感應定律於原線圈和副線圈，得到

$$V_p = -N_p \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \text{和} \tag{1}$$

$$V_s = -N_s \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

把上式 (1) 除以式 (2)，得

$$V_p : V_s = N_p : N_s \tag{3}$$

設變壓器的輸出方 (副線圈) 接駁電阻 R ，所以副電壓會製造電流 I_s。根據歐姆定律

$$V_s = I_s R \tag{4}$$

假設變壓器是理想，即是完全沒有能量損耗，所以輸入功率 = 輸出功率

$$V_p I_p = V_s I_s \tag{5}$$

利用上式 (3) 和式 (5)，再求得

$$I_p : I_s = N_s : N_p \tag{6}$$

式 (3) 和式 (6) 是理想變壓器的兩個著名比例：電壓正比於匝數；電流反比於匝數。

(II) 非 常 不 妥！

接上變壓器的是交流電。總會在某時刻，副電流為零 ($I_s = 0$)。我們的分析，就由此刻開始。在這時刻 $I_s = 0$，我們會相繼推論出在此時

$V_s = 0$	(因為 $V_s = I_sR$，而 $I_s = 0$)
$V_p = 0$	(因為電壓比，而 $V_s = 0$)
$I_p = 0$	(因為電流比，而 $I_s = 0$)
$d\Phi/dt = 0$	(因為式 (1)，而 $V_p = 0$；或利用式 (2)，$V_s = 0$)

另一方面，大家知道磁場是由電流製造。鐵芯的磁場必是由兩線圈的電流產生。在這時刻，I_p 和 I_s 均是零，所以在這時刻，$\Phi = 0$。

在這時刻，$\Phi = 0$ 及 $d\Phi/dt = 0$，所以在一個非常短的時間之後，Φ 也會是零。

有兩個可能性是會造成在這一個非常短的時間之後的 $\Phi = 0$ 。

可能 (1)：是那時的I_p 和 I_s 仍然是零。若是這樣，我們得$I_s = 0$ ，這亦即是我們推論的起點。我們再次用$I_s = 0$ 並重複以上推論，會得到一個非常短的時間之後的另一個非常短的時間之後，I_p 和 I_s 仍然是零。如果無限次重複推論，即是在之後的任何時間，I_p 和 I_s 均是零，$\Phi = 0$。這結果不合理吧！一個正常運作中的變壓器不可能是電流永遠是零，磁通量 Φ 永遠 是零。所以這個可能 (1) 似乎不合理，應該捨棄。

可能 (2)：造成在一個非常短的時間之後的 $\Phi = 0$ 的另一可能原因的當時I_p 和 I_s 並不是零，而是它們在鐵芯內造成的兩個磁場互相抵消。因為磁場抵消，也會得出 $\Phi = 0$。

但問題也來了！原電流和副電流常常滿足一條簡單比例公式：$I_p{:}I_s = N_s{:}N_p$。N_s 和 N_p 固定不變，所以 I_p 和 I_s 一定是以同一個因子 (factor) 來倍大或縮小。若果在某時刻 I_p 和 I_s 在鐵芯內的磁場互相抵消；在之後的任何時間，因為 I_p 和 I_s 常保持一個簡單比，即是它們的磁場也一直維持着「相消」的關係 (不要忘記，磁場正比於電流)。無可避免，再一次推論出在任何時刻，$\Phi = 0$。

無論是可能 (1) 或可能 (2)，結論都是一樣：在任何時刻，$\Phi = 0$。但這是不可能的！變壓器背後的工作原理是電磁感應，Φ 在任何時刻都是零，那裏來電磁感應？

以上的邏輯推論有誤嗎？沒有。唯一的結論是我們熟悉的「理想變壓器」並不是一個自洽 (self-consistent) 理論：即它是一個不能自圓其說，是一個自相矛盾的理論。

簡而言之，我們熟知的那個「理想變壓器」(滿足 (i) 輸入功率 = 輸出功率，(ii) 電壓正比於匝數，(iii) 電流反比於匝數) 就是一個 "no-flux transformer"。

有同學問：「我們課本遇上的問題，往往也說變壓器不是理想，它的效率譬如說只有 60%。那以上推論是否仍然成立？」

$\because$ 效率 (efficiency) = 60%

$\therefore$ $V_pI_p\,(0.6) = V_sI_s$

$\because$ $V_p:V_s = N_p:N_s$

$\therefore$ $I_p:I_s = N_s:(0.6\,N_p)$

即是這兩電流仍滿足一個固定的數學比，所以上述推論和結論依然成立。

(II) 啥 錯 了？

在推導理想變壓器時，我們用了 "輸入功率 = 輸出功率"，即是 $V_pI_p = V_sI_s$。儘管變壓器是理想，"$V_pI_p = V_sI_s$" 就不可能完全正確。這個 「Φ 永遠是零」就是因為這個錯誤關係。

電磁感應依賴的是一個隨時間變化的磁通量。磁場就是能量，隨時間變化的磁場即是磁能會隨時間轉變。這些磁能最終絲毫沒有消耗，因為已假設了變壓器是百份百「理想」。但無論變壓器是如何「理想」，藏在鐵芯的磁能必會隨時間起伏；有時比平均值多些，這時要靠電源提供多一些；有時比平均值少些，這時就有一些磁能轉回給電源。所以，正確的功率關係是

$$V_pI_p = V_sI_s + P_m \qquad (7)$$

其中 P_m 是鐵芯磁能的變化率。 其實，左方的 V_pI_p 也是不對的，正確的應該是 εI_p，其中 ε 是電源的電動勢 (e.m.f.)， 這錯誤會把正確的電流比前的負號漏掉了。

若果把 P_m 棄掉或遺漏了，即是假設鐵芯內沒有磁能，又即是假設了沒有磁場。所以，以"$V_pI_p = V_sI_s$" 作為基礎而建立起的「理想變壓器」就必然是一個 "no-flux transformer" 了。

上式 (7) 是瞬時功率的關係，但如果把式兩邊取 rms 平均值，那是 $<V_pI_p> = < V_sI_s>$，因為變壓器是理想，$<P_m> = 0$。副線圈符合歐姆定律，所以 V_s 和 I_s 必然同相，但 V_p 和 I_p 就不一定了。所以 $<V_pI_p> = < V_sI_s>$ 會寫為 $V_{p,\,rms}\, I_{p,\,rms} \cos\phi = V_{s,\,rms}\, I_{s,rms}$ ，其中 rms 表示 root-mean-square 值，ϕ 是 V_p 與 I_p 的相角。

(III) 正確的「理想變壓器」

只要開始時把正確的物理放進方程，正確的答案就會自動走出來。如此，我們推導出正確的 「理想變壓器」。這裏，我們只作一個扼要的定性解說。

1. 當交流電接上變壓器的輸入端（原線圈），就會產生一個滯後電源電壓 1/4 週期的電流，情況正如純電感器（pure inductor）接上交流電般。這電流會在鐵芯產生磁場、磁鏈（magnetic flux linkage）， 並沿鐵芯通去副線圈那邊。 這電流雖然也是在原線圈流動，但此電流並不是我們熟悉的原電流；它的名稱是「勵磁電流」(magnetization current） 或「激磁電流」(exciting current) 。這隨時間變化的磁通量會在副線圈產生感應電動勢（induced emf）。換言之，變壓器的電磁感應是由勵磁電流完成的。這是一個重點。

2. 若果副線圈斷路（沒有接上負載），那發生在副線圈的感應電動勢（induced emf）沒有產生感生電流（induced current）。 所以， 那時並

沒有出現我們熟悉的原電流和副電流，但是勵磁電流還是(必須)存在。所以，有人稱勵磁電流為 「無載電流」(no-load current)。

3. 若果副線圈接上了負載電阻(load resistor)，那副線圈的感應電動勢(induced emf)就會在副線圈那邊產生感生電流(induced current)，那即是我們熟悉的「副電流」(secondary current)(我們以符號 I_s 表示)。

4. 副電流在負載電阻造成電量損耗。這個能量輸出必然要求在原線圈那邊有一個對應的能量輸入。但是，勵磁電流(我們以符號 $I_{p,M}$ 表示)與電源存在的 π/2 相角差令這電流不能從電源抽取能量(平均功率是零)。

最終，在原線圈那邊會出現另一個原電流來完成這能量傳輸。 這原電流與交流電源同相。這個原電流就是我們熟悉的原電流(primary current)(我們以符號 $I_{p,L}$ 表示) 。這個我們熟悉的原電流($I_{p,L}$)的任務並不是負責製造變壓器的電磁感應，而只是把電能從電源輸入並傳輸到副線圈去。

5. 因為我們假設了變壓器是「理想」100% efficiency, 輸入功率 = 輸

出功率。這要求就等同「我們熟悉的原電流($I_{p,L}$)和副電流(I_s)兩電流在鐵芯製造的磁場必定互相抵消」。

大家知道，原線圈和副線圈沒有連接駁着，能量能夠從輸入端走去輸出端依靠的是以下這變化：

輸入電能 → $I_{p,L}$ 的磁能 → I_s 的磁能 → 輸出電能

要保證由 $I_{p,L}$ 製造的磁能在鐵芯「放下」，可以即時（instantaneous）百份百全部被 I_s「拿走」，轉變為 I_s 的輸出電能，數學表述就是 $I_{p,L}$ 和 I_s 在鐵芯製造的磁場必定在甚麼時刻皆抵消。試想，若果這兩磁場沒有完全抵消，那殘留剩餘下來的磁場（能量）代表甚麼？若有能量殘留，那又何來即時的 100% 能量轉換？

因為 $I_{p,L}$ 和 I_s 兩電流在鐵芯製造的磁場在任何時刻皆互相抵消，所以在鐵芯的唯一磁場還是由勵磁電流（$I_{p,M}$ ）製造的那個。有負載和沒有負載 $I_{p,M}$ 都沒改變。

6. 本文頁 3「(II) 非 常 不 妥」裏的分析其實只是証明了一個事實：

$I_{p,L}$(即是那裏的 I_p) 和 I_s 兩電流在鐵芯沒有製造一個淨磁場。

7. 或問，為何不把原電流的那兩個電流相加起變一個呢？當然可以相加，但須注意的是它們不是同相（in phase）的。不加起，這兩個原電流各有功能，清清楚楚，不好嗎？說鐵芯的磁通，說變壓器的電磁感應，你用上的是勵磁電流 $I_{p,M}$；當說功率、電流比等公式，用的就是我們熟悉的 $I_{p,L}$。

(IV) 我們學的「理想變壓器」有啥問題？

「理想變壓器」一般理解是「簡單、易學習」的一個理論，所以在「理想變壓器」中往往會加入一條這樣的假設：「變壓器線圈的電感 (inductance) 無限大」。大家知道，電感 (inductor) 的磁鏈 flux linkage $N\Phi = LI$。 現在是勵磁電流 $I_{p,M}$ 流過原線圈而產生磁鏈，所以 $N_p\Phi = L_pI_{p,M}$ 。 當電感 L_p 很大時，一個微弱的 $I_{p,M}$ 已經足以產生那需要的磁鏈。力求「簡單、易學」 (另一原因是電感越大，能量損失就越少)，不如就索性假設電感「無限大」，那勵磁電流就變得「無限微弱」 → 不如直接當 $I_{p,M} = 0$ 就好了。 如此這般，$I_{p,M}$ 就在公式和概念裏徹底消失，大家學習的那「理想變壓器」就是這樣來的。

公式上，或許表面並無不妥。 但事實是，無論勵磁電流 $I_{p,M}$ 如何微弱，你總不可以設它為零或視它不存在。

- 「$I_{p,M}$ 製造鐵芯磁場」這事實不會因為假設「$I_{p,M}$ 是零」而改變。 鐵芯的磁鏈是 $N_p\Phi = L_pI_{p,M}$ ： 無限微弱的 $I_{p,M}$ 乘上無限大的電感，就是那實際需要的非零磁鏈；但零的 $I_{p,M}$ 乘上多大的電感都是零磁鏈。

- 整個變壓器的運作機制不會因為假設「$I_{p,M}$ 是零」而改變。

- 「$I_{p,L}$ 與副電流 I_s 在鐵芯的磁場一直互相抵消」這事實不會因為假設了「$I_{p,M}$ 是零」而改變。

盡管數式上沒有了 $I_{p,M}$ ，但概念上不能沒有它。 如真的 $I_{p,M}$ 徹底消失， 學生不可能會真的明白（但不妨礙考試有好成績）。就算 $I_{p,M}$ 渺少如零，老師也不能不提它的存在和意義 （若老師的教學目的是讓學生真的明白）。

(V) 「形」雖不在，但「神」仍須留

在中學教授「理想變壓器」， 筆者不反對老師如往常般的教學。但筆者希望（有心的）老師可以加入像以下的一個補充說明：

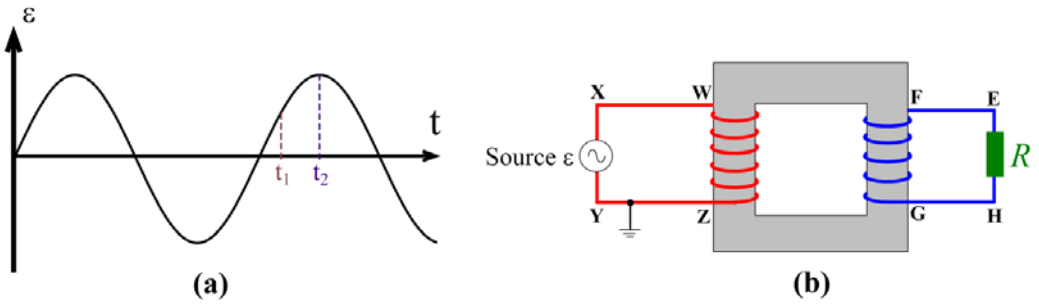
「各位同學，我們學習的只是一個簡化了的理論，所以得出的結果難免有錯漏。為了大家有一個正確的概念，我們須要補充以下數點：

1. 鐵芯的磁場不是由我們熟悉（即是在電流比公式出現）的原電流或副電流產生。 事實上， 這兩電流在鐵芯產生的磁場在任何時刻皆是互相抵消。
2. 產生電磁感應的磁場是由我們熟悉的原電流以外的另一原電流產生。這電流並不在我們學習的公式中出現，它並不符合『電流與匝數反比』 的關係。這電流整體上不會從電源提取能量。這電流滯後電源電壓 90°。
3. 重要的是，副電流並不是我們熟悉的那原電流的感生電流（induced current）。
4. 那麼，副電流是如何產生的呢？是由以上（2）說的那另一原電流利用電磁感應產生。」

(VI) 如果學生學習了以上的補充概念，老師擬題的內容也因此而廣闊了不少。以下為一 例。

一道非一般的中學「變壓器」例題：

下圖 (a) 的交流電壓輸入給圖 (b) 的理想變壓器 (ideal transformer)。



問：

(A) 在圖 (a) $t = t_1$ 的時刻，

(i) 副電流 (secondary current) 的流動方向為何？ 副線圈的輸出端 F 和 G，那一端是正極？

(ii) 鐵芯內磁場方向為何？是增強中還是在減弱中？

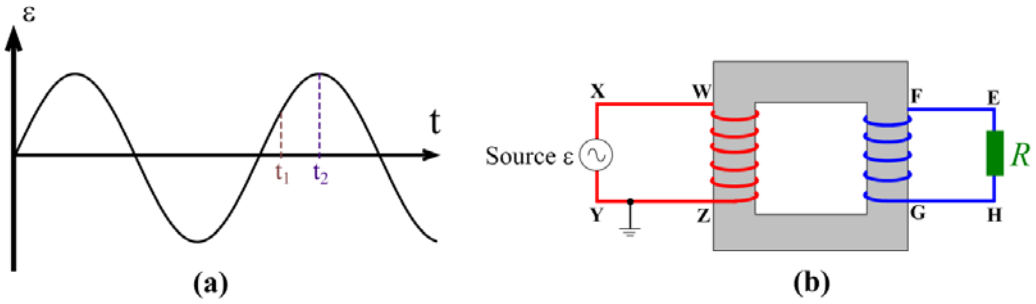
(iii) 原電流 (primary current) 的方向為何？

(B) 若(只)把原線圈電線繞電芯的方向逆轉，問 (A) (i) 和 (A) (ii) 相同問題。

(C) 在 $t = t_2$ 的時刻，問 (A) (i) 和 (A) (ii) 相同問題。

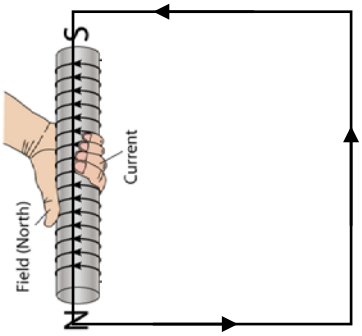
答：

這問題基本上只須引用筆者倡議加入高中課程的那段說話 「鐵芯的磁場不是由 $I_{p,L}$ 或/和 I_s 產生。事實上，$I_{p,L}$ 和 I_s 在鐵芯產生的磁場總是互相抵消。產生電磁感應的磁場是由在原線圈，I_p 以外的另一原電流產生，這電流並不符合 『電流與匝數反比』的關係，(這電流滯後電源電壓 90^0) ....」就可以基本回答了。尤其重要是那句「I_p 和 I_s 在鐵芯產生的磁場互相抵消」。



(A) (i) 在 $t = t_1$，電源電壓 ε 是正。電源的 Y 端接地，所以在這時刻， I_p (即是本文先前講的

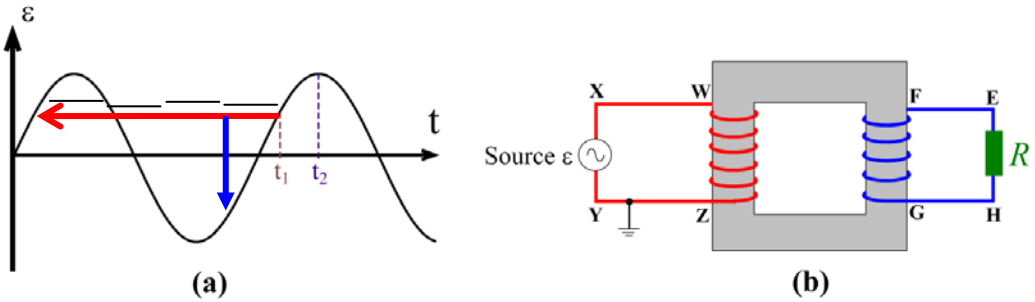
$I_{p,L}$) 的流動方向是 XWZYX (不要忘記 $I_{p,L}$ 與電源同相)。知道了電流流過原線圈的方向，然後用線圈的右手握拳定則 (right-hand grip rule for solenoids) 求出 I_p 在鐵芯製造了一個逆時針方向的磁場。



由 I_p (即本文的 $I_{p,L}$) 產生環繞鐵芯的磁場

因為 I_p 和 I_s 在鐵芯產生的磁場互相抵消，所以 I_s 在鐵芯製造的磁場必然就是順時針方向。再次運用線圈的右手握拳定則，不過這次是運用於副線圈 (用已知磁場去來求電流)。因而求出副電流的方向是 FEHGF。副電流 I_s 是副線圈的感生電流，所以 I_s 流出副線圈的流出端 (F) 就是正極 (或說，電流流過電阻的方向是正去負)。W 和 F 常保持同相。

(A) (ii) 這部份需用上這句「 “製造鐵芯磁場的那原電流” 滯後 “電源電壓” 1/4 週期」。



在圖 (a) 的 $t = t_1$ 開始，向左移一週期 (左方是較早時間)。然後取此一週期的 1/4。那大概就是上圖(a)藍箭所指的曲線部份。意謂當在 $t = t_1$ 時，製造那磁場的原電流 ($I_{p,M}$) 的交流波形就是如藍箭矢所指的波形般：是一個負值而是趨向着零，即是在減弱當中。 這樣的電流所製造的鐵芯磁場(是最後的淨磁場)是以順時針方向繞着鐵芯。即是，通過副線圈的是一個向下而減弱中的磁場。親愛的讀者，你不妨運用在課堂已學過的電磁感應，看看一個這樣向下而減弱中的磁場所產生的感生電流是否就是如 (A) (i) 求得的副電流

I_s 方向？

(A) (iii) 在 $t = t_1$，原電流 (primary current) 的方向為何？原則上，原電流 (primary current) 是 $I_{p,L}$ 和 $I_{p,M}$ 之和。在這時刻，$I_{p,L}$ 是正，$I_{p,M}$ 是負。除非我們知道這變壓器的參數，否則我們是不能知哪個電流的量值會較大。那即是說我們不能確定在這時刻原電流的方向。

但如果我們說的是一個理想變壓器，$I_{p,M}$ 會很小；但同時，也須假設負載電阻也很小，那 $|I_{p,L}| >> |I_{p,M}|$ 大概就會成立。那時，原電流大概會與電源同相 (in-phase)。

讀者或問，既然我們在 (A) (ii) 已求出此刻的磁場是順時針方向繞着鐵芯並在減弱中，我們可否也用這來求原線圈電流，如在 (A) (ii) 印證副電流 I_s 方向的方法般？答案是不可以。這裏涉及另一重要概念：在理想變壓器，原線圈電流I_p, (即是本文說的$I_{p,L} + I_{p,M}$) 不是原線圈的感生電流 。原線圈的感生電動勢 (emf) 已被電源的電動勢完全消去。 原線圈的感生電動勢是不會產生感生電流。原電流的出現是按整個系統（原線圈+副線圈）的物理需求來決定。

明白了以上辦法，就容易回答 (B) 和 (C) 的問題。

(B) I_p (即是本文先前講的 $I_{p,L}$) 的流動方向仍然是 XWZYX，但因為原線圈電線繞電芯的方向逆轉了，所以 I_p 在鐵芯製造了一個順時針方向的磁場，所以 I_s 在鐵芯製造的磁場是逆時針方向。I_s 的方向是 GHEFG。端 G 是正。W 和 G 常保持同相。在這時刻，鐵芯磁場是逆時針方向繞着鐵芯並在減弱中。

(C) I_p (即是本文先前講的 $I_{p,L}$) 的流動方向仍然是 XWZYX。I_s 的方向是 FEHGF。端 F 是正。此刻，鐵芯內的磁場是零，但在增強中。

重要的概念不妨重複多次。我們以以下這段說話作結語：

變壓器是電磁感應的一個重要應用。 同學從課堂上學了「變壓器的輸出電流（副電流）是輸入那邊、我們熟悉的、出現電流比公式的那個原電流的感生電流（induced current）。」

In an ideal transformer, how is the secondary current related to the primary current in the famous current ratio, and is it true that the former is induced by the latter?

GPT-4o Poe

In an ideal transformer, the relationship between the secondary current (I_s) and the primary current (I_p) is determined by the turns ratio of the transformer. The turns ratio is the ratio of the number of turns in the primary coil (N_p) to the number of turns in the secondary coil (N_s).

The current relationship is given by:

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s}$$

This means that the secondary current is inversely proportional to the turns ratio. In other words, if the secondary coil has fewer turns than the primary, the secondary current will be greater than the primary current, and vice versa.

Regarding induction, yes, the secondary current is indeed induced by the primary current through electromagnetic induction. When an alternating current flows through the primary coil, it creates a changing magnetic field, which induces an electromotive force (EMF) and consequently a current in the secondary coil. This is the principle of mutual induction.

可惜，這觀念是錯的。一處錯，處處錯。歸根結柢，是那個非常重要、真正利用電磁感應來製造副電流的那個雖然渺少但異常重要的另一個原電流（勵磁電流）在理想變壓器理論中完全不見了影蹤。不提它，並不表示它真的可以不須要提！

出現在電流比公式的那個原電流和副電流不是「電源電流和感生電流」的關係。這兩電流不遵從楞次定律。

它們的關係是甚麼？只不過就是「輸入功率=輸出功率」裏說的關係，僅此而已！只要用正確的物理把這個「輸入功率=輸出功率」寫出，那這兩電流所製造的鐵芯磁場必定相反抵消這一特性就自然顯露出來。楞次定律說的是“oppose the change” ；而這兩電流製造的鐵芯磁場總是“oppose” 對方。兩者完全不是同一回事！

老師很喜歡在課堂演示的「跳環實驗」(Thomson's jumping ring)，用「正確的理想變壓器理論」直接一步就解釋了。

其實，這個「跳環實驗」驗證的正正就是這個正確的「理想變壓器」理論。

變壓器是關乎三個電流的故事。缺了一個唱不了這台戲，勉強唱亦只是一齣胡搞的爛劇！

✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷

參考：

1. Clarifying concepts and gaining a deeper understanding of ideal transformers
http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6404/aaabc4/pdf

2. The Thomson Jumping Ring Experiment and Ideal Transformer
https://doi.org/10.1119/5.0036490

3. The voltages and polarity of an inductor
https://dx.doi.org/10.1088/1361-6552/ab6e01

✻ ✻ ✻ ✻ ✻ ✻ ✻ ✻ ✻ ✻

作者：吳老師 (Chiu-King Ng)

電郵：feedbackWZ@phy.hk 其中 WZ 是23 之後的質數

https://ngsir.netfirms.com

http://phy.hk