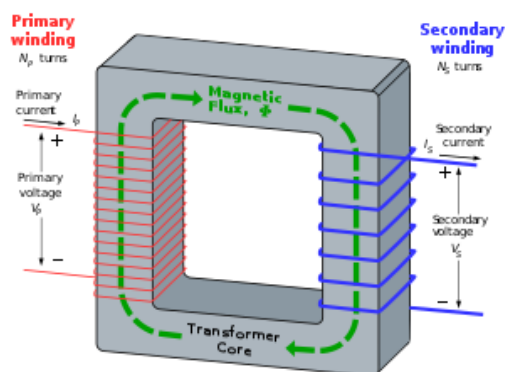


中學課程教授的「理想變壓器」(電壓正比於匝數；電流反比於匝數)其實是一個 "no-flux transformer"，即是它鐵芯內的磁場在甚麼時刻皆零。你覺得奇怪嗎？

## (I) 一般中學學習的「理想變壓器」



圖片來自 <https://en.wikipedia.org/wiki/Transformer>

假設變壓器沒有漏磁、導線沒有電阻、鐵芯沒有渦電流 (eddy current) ... 等等。即是完全沒有能量損耗，故曰此變壓器「理想」。

變壓器的基本運作原理是法拉第電磁感應定律 (Faraday's law of induction)。假設繞着鐵芯的磁通量 (magnetic flux = BA) 為  $\Phi$ ；因為沒有漏磁，所以原線圈和副線圈兩邊的磁通量相同，都是  $\Phi$ 。運用法拉第電磁感應定律於原線圈和副線圈，得到

$$V_p = -N_p \frac{d\Phi}{dt}, \text{ 和} \quad (1)$$

$$V_s = -N_s \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2)$$

把上式 (1) 除以式 (2)，得

$$V_p : V_s = N_p : N_s \quad (3)$$

設變壓器的輸出方 (副線圈) 接駁電阻  $R$ ，所以副電壓會製造電流  $I_s$ 。根據歐姆定律

$$V_s = I_s R \quad (4)$$

假設變壓器是理想，即是完全沒有能量損耗，所以輸入功率 = 輸出功率

$$V_p I_p = V_s I_s \quad (5)$$

利用上式 (3) 和式 (5)，再求得

$$I_p : I_s = N_s : N_p \quad (6)$$

式 (3) 和式 (6) 是理想變壓器的兩個著名比例：電壓正比於匝數；電流反比於匝數。

## (II) 不妥！

接上變壓器的是交流電。總會在某時刻，副電流為零 ( $I_s = 0$ )。我們的分析，就由此刻開始。在這時刻  $I_s = 0$ ，我們會相繼推論出

$$V_s = 0 \quad (\text{因為 } V_s = I_s R, \text{ 而 } I_s = 0)$$

$$V_p = 0 \quad (\text{因為電壓比, 而 } V_s = 0)$$

$$I_p = 0 \quad (\text{因為電流比, 而 } I_s = 0)$$

$$d\Phi/dt = 0 \quad (\text{因為式 (1), 而 } V_p = 0; \text{ 或利用式 (2), } V_s = 0)$$

另一方面，大家知道磁場是由電流製造。鐵芯的磁場必是由兩線圈的電流產生。在這時刻， $I_p$  和  $I_s$  均是零，所以在這時刻， $\Phi = 0$ 。

在這時刻， $\Phi = 0$  及  $d\Phi/dt = 0$ ，所以在一個非常短的時間之後， $\Phi$  也會是零。

有兩個可能性是會造成在這一個非常短的時間之後的  $\Phi = 0$ 。

可能 (1)：是那時的  $I_p$  和  $I_s$  仍然是零。若是這樣，我們得  $I_s = 0$ ，這亦即是我們推論的起點。我們再次用  $I_s = 0$  並重複以上推論，會得到一個非常短的時間之後的另一個非常短的時間之後， $I_p$  和  $I_s$  仍然是零。如果無限次重複推論，即是在之後的任何時間， $I_p$  和  $I_s$  均是零， $\Phi = 0$ 。這結果不合理吧！一個正常運作中的變壓器不可能是電流永遠是零，磁通量  $\Phi$  永遠是零。所以這個可能 (1) 似乎不合理，應該捨棄。

可能 (2)：造成在一個非常短的時間之後的  $\Phi = 0$  的另一可能原因的當時  $I_p$  和  $I_s$  並不是零，而是它們在鐵芯內造成的兩個磁場互相抵消。因為磁場抵消，也會得出  $\Phi = 0$ 。

但問題也來了！原電流和副電流常常滿足一條簡單比例公式： $I_p \cdot I_s = N_s \cdot N_p$ 。 $N_s$  和  $N_p$  固定不變，所以  $I_p$  和  $I_s$  一定是以同一個因子 (factor) 來倍大或縮小。若果在某時刻  $I_p$  和  $I_s$  在鐵芯內的磁場互相抵消；在之後的任何時間，因為  $I_p$  和  $I_s$  常保持一個簡單比，即是它們的磁場也一直維持着「相消」的關係 (不要忘記，磁場正比於電流)。無可避免，再一次推論出在任何時刻， $\Phi = 0$ 。

無論是可能 (1) 或可能 (2)，結論都是一樣：在任何時刻， $\Phi = 0$ 。但這是不可能的！變壓器背後的工作原理是電磁感應， $\Phi$  在任何時刻都是零，那裏來電磁感應？

以上的邏輯推論有誤嗎？沒有。唯一的結論是我們熟悉的「理想變壓器」並**不是**一個自治 (self-consistent) 理論：即它是一個不能自圓其說，是一個自相矛盾的理論。

簡而言之，我們熟知的那個「理想變壓器」(滿足 (i) 輸入功率 = 輸出功率，(ii) 電壓正比於匝數，(iii) 電流反比於匝數) 就是一個 "no-flux transformer"。

有同學問：「我們課本遇上的問題，往往也說變壓器不是理想，它的效率譬如說只有 60%。那以上推論是否仍然成立？」

$$\therefore \text{效率 (efficiency)} = 60\%$$

$$\therefore V_p I_p (0.6) = V_s I_s$$

$$\therefore V_p : V_s = N_p : N_s$$

$$\therefore I_p : I_s = N_s : (0.6 N_p)$$

即是這兩電流仍滿足一個固定的數學比，所以上述推論和結論依然成立。



## (II) 啥地方錯了？

在推導理想變壓器時，我們用了 "輸入功率 = 輸出功率"，即是  $V_p I_p = V_s I_s$ 。儘管變壓器是理想，" $V_p I_p = V_s I_s$ " 就是不完全正確。這個「 $\Phi$  永遠是零」就是因為這個錯誤關係。

道理不複雜。電磁感應依賴的是一個隨時間變化的磁通量。磁場就是能量，隨時間變化的磁場即是磁能會隨時間轉變。這些磁能最終絲毫沒有消耗，因為已假設了變壓器是百份百「理想」。但無論變壓器是如何「理想」，藏在鐵芯的磁能必會隨時間起伏；有時比平均值多些，這時要靠電源提供多一些；有時比平均值少些，這時就有一些磁能轉回給電源。所以，正確的功率關係是

$$V_p I_p = V_s I_s + P_m \quad (7)$$

其中  $P_m$  是鐵芯磁能的變化率。其實左方的  $V_p I_p$  也是不對的，正確的應該是  $\varepsilon I_p$ ，其中  $\varepsilon$  是電源的電動勢 (e.m.f.) (電動勢 electromotive force 和 電勢差 potential difference 的分別，請參看 <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6552/ab6e01>)，這錯誤會把正確的電

流比前的負號漏掉了。

若果把  $P_m$  棄掉或遺漏了，即是假設鐵芯內沒有磁能，又即是假設了沒有磁場。所以，以 " $V_p I_p = V_s I_s$ " 作為基礎而建立起的「理想變壓器」就會是一個 "no-flux transformer" 了。

上式 (7) 是瞬時功率的關係，但如果把式兩邊取平均值，那是  $\langle V_p I_p \rangle = \langle V_s I_s \rangle$ ，因為變壓器是理想， $\langle P_m \rangle = 0$ 。副線圈符合歐姆定律，所以  $V_s$  和  $I_s$  必然同相，但  $V_p$  和  $I_p$  就不一定了。所以  $\langle V_p I_p \rangle = \langle V_s I_s \rangle$  會寫為  $V_{p, rms} I_{p, rms} \cos \phi = V_{s, rms} I_{s, rms}$ ，其中 rms 表示 root-mean-square 值， $\phi$  是  $V_p$  與  $I_p$  的相角。

由式 (7) 出發，就可解到正確的「理想變壓器」。其中涉及的數學不難，但在這裏都是省卻了。有興趣的讀者請參看筆者在 EJP 發表的一篇拙文 [Clarifying concepts and gaining a deeper understanding of ideal transformers](http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6404/aaabc4/pdf) (<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6404/aaabc4/pdf>)。這篇文章是把一些關於 ideal transformers 的一些在高中課本裏欠奉或說得不清楚或無意間令人誤解的概念作了澄清和解釋。

### (III) 正確的「理想變壓器」

由式 (7) 出發，就可解到正確的「理想變壓器」。解之中的最重點是原電流可視為兩部份：

1. 其中一部份即是 " $V_p I_p = V_s I_s$ " 和 " $I_p : I_s = N_s : N_p$ " 裏的  $I_p$ 。這部份的原電流我們改以符號  $I_{p,L}$  表示。 $I_{p,L}$  與電源同相。 $I_{p,L}$  與副電流  $I_s$  在鐵芯的磁場一直互相抵消 (即是我們先前說的  $I_p$  和  $I_s$  所產生的總磁通量一直是  $\Phi = 0$ ，頁 3 的推論其實就是一個證明)。正確的電流比應該是  $I_{p,L} : I_s = -N_s : N_p$ ，即是  $N_p I_{p,L} = -N_s I_s$ 。我們知道在同一螺線管的磁場正比於“匝數×電流”(安培定律 Ampere's law)。這個關係“ $N_p I_{p,L} = -N_s I_s$ ”正好說明了  $I_{p,L}$  與  $I_s$  在鐵芯的磁場一直保持着互相抵消。
2. 原電流的另一部份是在那不太正確的「理想變壓器」中未曾出現，它是來源自式(7) 的  $P_m$ 。這個原電流我們會以符號  $I_{p,M}$  表示。 $I_{p,M}$  稱為勵磁電流 (magnetizing current)、激磁電流 (exciting current) 或 無載電流 (no-load current)。此部份的原電流就是用來

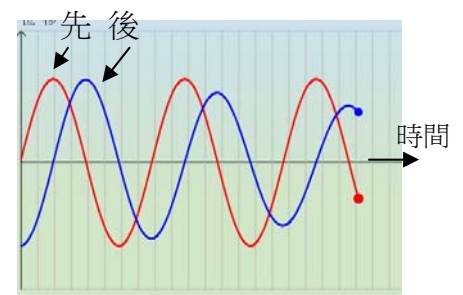
製造鐵芯的磁場；此電流比電源滯後  $\pi/2$ 。要強調一點，「無載電流」並不是指當變壓器沒有負載時，此電流才出現；而是此原電流在甚麼負載（無載或短路）下都存在和相同。之所以稱為「無載電流」，因為當「無載」時，原電流就只有此電流。「無載電流」是一個令人容易誤解的名稱，筆者建議把它改為「與負載無關、製造鐵芯磁場的原電流」(load-independent-core-flux primary current)。  $I_{p,M}$  比電源滯後  $\pi/2$ 。

甚麼是 "滯後  $\pi/2$  ?" 筆者寫的電腦模擬「相位差」(<http://phy.hk/wiki/chinesehtm/phase.htm>) 或有助明白

右圖中的藍曲線滯後了紅曲線  $\pi/2$ 。

若紅線是電源電壓或是  $I_{p,L}$ ，那藍線就是  $I_{p,M}$ 。

譬如說，紅線開始時是零，藍線要遲四分之一週期後才是零。



#### (IV) 勵磁電流 $I_{p,M}$ 或是真的很微弱，但不能視它為零！

讀者或會有一大疑團：「先前講的甚麼  $V_p I_p = V_s I_s + P_m$ ，又不是甚麼艱深概念，難道真是沒人知道這個鐵芯磁能的變化率  $P_m$  和這個勵磁電流嗎？」當然不是！這些概念都已廣泛被人認識。之不過，「理想變壓器」一般都會理解應該是「簡單、易學習」的一個理論，所以在「理想變壓器」中往往會加入一條這樣的假設：「變壓器線圈的電感 (inductance) 無限大」。大家知道，電感 (inductor) 的磁鏈 flux linkage  $N\Phi = LI$ 。情況相同，現在是  $I_{p,M}$  流過原線圈而產生磁鏈，所以  $N_p\Phi = L_p I_{p,M}$ 。當電感  $L_p$  很大時，一個微弱的  $I_{p,M}$  已經足以產生那需要的磁鏈。力求真的「簡單、易學習」（另一原因是電感越大，能量損失就越少），不如就索性假設電感「無限大」，那勵磁電流就變得「無限微弱」→ 不如直接當  $I_{p,M} = 0$  就好了。如此這般， $I_{p,M}$  就在公式和概念裏徹底消失，大家學習的那「理想變壓器」就是這樣來的。

公式上，或許表面並無不妥。但事實是，無論  $I_{p,M}$  如何微弱，你都不可以設它為零。 $I_{p,M}$  完全消失下的「理想變壓器」，就是一個自相矛盾的 (paradoxical) 的理論。

- 概念「 $I_{p,L}$  與副電流  $I_s$  在鐵芯的磁場一直互相抵消」，不會因為假設「 $I_{p,M}$  是零」而改變。
- 概念「 $I_{p,M}$  製造鐵芯的磁場」，不會因為假設「 $I_{p,M}$  是零」而改變。事實上，鐵芯的磁鏈  $N_p\Phi = L_p I_{p,M}$ 。無限微弱的  $I_{p,M}$  乘上無限大的電感，就是那實質需要的非零磁鏈；但零的  $I_{p,M}$  乘上多大的電感都是零的磁鏈。假設了  $I_{p,M}$  為零的變壓器，只會是一個「沒有了磁場的變壓器」。
- 所以，在「電感無限大」假設下的「理想變壓器」，我們只可以假設勵磁電流  $I_{p,M}$  無限微弱。是不能假設  $I_{p,M}$  為零的，如真的假設了  $I_{p,M} = 0$ ，理論就必然會出現麻煩。
- 為求貫徹「簡單、易學習」原則，但也不喪失至寶貴的理論自治性，那最起碼在概念上也應該清楚說明勵磁電流的存在和意義，這應該是一個「負責任的物理教育 (不是為求考試)」的底線了。

(V) 在中學教授「理想變壓器」，筆者不反對老師如往常般推導  $V_p I_p = V_s I_s$ 、 $V_p : V_s = N_p : N_s$  和  $I_p : I_s = N_s : N_p$  等的關係。但筆者倡議至少加入像以下的一個定性解說：

「各位同學，我們學習的只是一個簡化了的理論，所以得出的結果難免有錯漏。為了大家有一個正確的概念，我們須要補充以下數點：

- (1) 鐵芯的磁場不是由  $I_p$  或/和  $I_s$  產生。事實上， $I_p$  和  $I_s$  在鐵芯產生的磁場在任何時刻皆是互相抵消。這個「抵消」與楞次定律無關。

(2) 產生電磁感應的磁場是由在原線圈， $I_p$  以外的另一原電流產生。這電流並不在我們學習的公式中出現，它並不符合『電流與匝數反比』的關係，這電流滯後電源電壓  $1/4$  週期，這電流從電源提取的平均功率是零。

(3) 換言之，副電流  $I_s$  並不是由  $I_p$ ，而是由以上 (2) 提及的那原電流利用電磁感應產生。」

“ $I_p$  和  $I_s$  在鐵芯產生的磁場在任何時刻皆是互相抵消” 和 “產生電磁感應的磁場是由在原線圈  $I_p$  以外的另一原電流產生。” 此兩點是核心。至於其他還可到多深入，那視乎學生的能力。

如果沒有補充上段文字，那作為電磁感應的一個實際應用，但又完全不能用 Faraday's law of induction 去印證和解釋 (因為沒有 flux，那又如何運用法拉第電磁感應定律呢?)，學習一個 "no-flux transformer"，意義何在呢？

實況往往是，好學的學生會自己嘗試把  $I_p$  和  $I_s$  套入 Faraday's law of induction 去弄個明白。結果只會是「越搞越糊塗」！(這時候，難道老師的「金句」「記住考試就可以了」又要出場了?)。

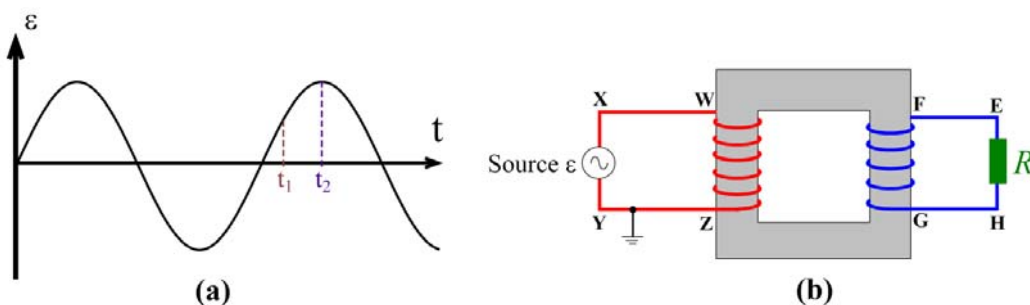




(VI) 如果學生學習了以上的補充概念，老師擬題的內容也因此而廣闊了不少。以下為一例。

### 一道非一般的中學「變壓器」例題：

下圖 (a) 的交流電壓輸入給圖 (b) 的理想變壓器 (ideal transformer)。



問：

(A) 在圖 (a)  $t = t_1$  的時刻，

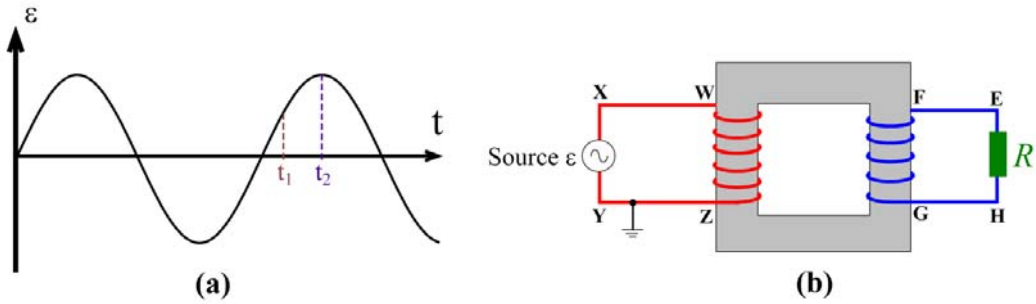
- 副電流 (secondary current) 的流動方向為何？副線圈的輸出端 F 和 G，那一端是正極？
- 鐵芯內磁場方向為何？是增強中還是在減弱中？
- 原電流 (primary current) 的方向為何？

(B) 若(只)把原線圈電線繞電芯的方向逆轉，問 (A) (i) 和 (A) (ii) 相同問題。

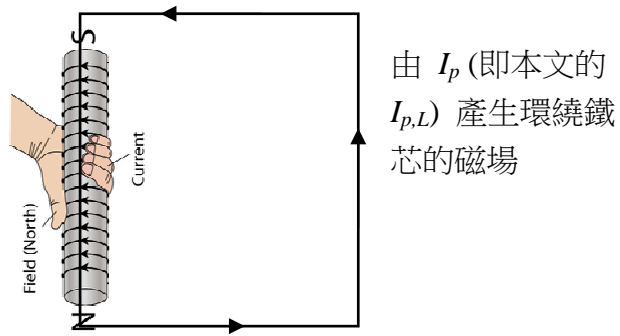
(C) 在  $t = t_2$  的時刻，問 (A) (i) 和 (A) (ii) 相同問題。

答：

這問題基本上只須引用筆者倡議加入高中課程的那段說話「鐵芯的磁場不是由  $I_p$  或和  $I_s$  產生。事實上， $I_p$  和  $I_s$  在鐵芯產生的磁場總是互相抵消。產生電磁感應的磁場是由在原線圈， $I_p$  以外的另一原電流產生，這電流並不符合『電流與匝數反比』的關係，(這電流滯後電源電壓  $90^\circ$ ) ....」就可以基本回答了。尤其重要是那句「 $I_p$  和  $I_s$  在鐵芯產生的磁場互相抵消」。

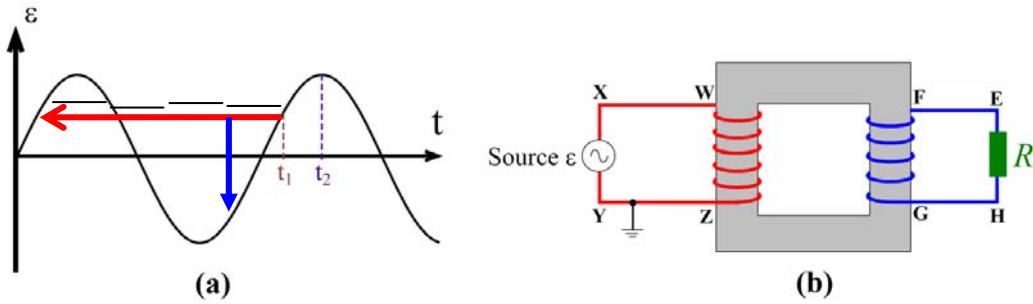


(A) (i) 在  $t = t_1$ ，電源電壓  $\varepsilon$  是正。電源的 Y 端接地，所以在這時刻， $I_p$  (即是本文先前講的  $I_{p,L}$ ) 的流動方向是  $XWZYX$  (不要忘記  $I_{p,L}$  與電源同相)。知道了電流流過原線圈的方向，然後用線圈的右手握拳定則 (right-hand grip rule for solenoids) 求出  $I_p$  在鐵芯製造了一個逆時針方向的磁場。



因為  $I_p$  和  $I_s$  在鐵芯產生的磁場互相抵消，所以  $I_s$  在鐵芯製造的磁場必然就是順時針方向。再次運用線圈的右手握拳定則，不過這次是運用於副線圈 (用已知磁場去來求電流)。因而求出副電流的方向是  $FEHGF$ 。副電流  $I_s$  是副線圈的感生電流，所以  $I_s$  流出副線圈的流出端 (F) 就是正極 (或說，電流流過電阻的方向是正去負)。W 和 F 常保持同相。

(A) (ii) 這部份需用上這句「“製造鐵芯磁場的那原電流”滯後“電源電壓”1/4 週期」。



在圖 (a) 的  $t = t_1$  開始，向左移一週期（左方是較早時間）。然後取此一週期的 1/4。那大概就是上圖(a)藍箭所指的曲線部份。意謂當在  $t = t_1$  時，製造那磁場的原電流 ( $I_{p,M}$ ) 的交流波形就是如藍箭矢所指的波形般：是一個負值而是趨向着零，即是在減弱當中。這樣的電流所製造的鐵芯磁場(是最後的淨磁場)是以順時針方向繞着鐵芯。即是，通過副線圈的是一個向下而減弱中的磁場。親愛的讀者，你不妨運用在課堂已學過的電磁感應，看看一個這樣向下而減弱中的磁場所產生的感生電流是否就是如 (A) (i) 求得的副電流  $I_s$  方向？

(A) (iii) 在  $t = t_1$ ，原電流 (primary current) 的方向為何？原則上，原電流 (primary current) 是  $I_{p,L}$  和  $I_{p,M}$  之和。在這時刻， $I_{p,L}$  是正， $I_{p,M}$  是負。除非我們知道這變壓器的參數，否則我們是不能知哪個電流的量值會較大。那即是說我們不能確定在這時刻原電流的方向。

但如果我們說的是一個理想變壓器， $I_{p,M}$  會很小；但同時，也須假設負載電阻也很小，那  $|I_{p,L}| \gg |I_{p,M}|$  大概就會成立。那時，原電流大概會與電源同相 (in-phase)。

讀者或問，既然我們在 (A) (ii) 已求出此刻的磁場是順時針方向繞着鐵芯並在減弱中，我們可否也用這來求原線圈電流，如在 (A) (ii) 印證副電流  $I_s$  方向的方法般？答案是不可以。這裏涉及另一重要概念：在理想變壓器，原線圈電流  $I_p$  (即是本文說的  $I_{p,L} + I_{p,M}$ ) 不是原線圈的感生電流。原線圈的感生電動勢 (emf) 已被電源的電動勢完全消去。原線圈的感生電動勢是不會產生感生電流。原電流的出現是按整個系統（原線圈+副線圈）的物理需求來決定。

明白了以上辦法，就容易回答 (B) 和 (C) 的問題。

(B)  $I_p$  (即是本文先前講的  $I_{p,L}$ ) 的流動方向仍然是 XWZYX，但因為原線圈電線繞電芯的方向逆轉了，所以  $I_p$  在鐵芯製造了一個順時針方向的磁場，所以  $I_s$  在鐵芯製造的磁場是逆時針方向。 $I_s$  的方向是 GHEFG。端 G 是正。W 和 G 常保持同相。在這時刻，鐵芯磁場是逆時針方向繞着鐵芯並在減弱中。

(C)  $I_p$  (即是本文先前講的  $I_{p,L}$ ) 的流動方向仍然是 XWZYX。 $I_s$  的方向是 FEHGF。端 F 是正。此刻，鐵芯內的磁場是零，但在增強中。



作者：吳老師 (Chiu-King Ng)

電郵：feedbackWZ@phy. hk 其中 WZ 是23 之後的質數

<https://ngsir.netfirms.com>

<http://phy.hk>