能量守恆的三種數學表述

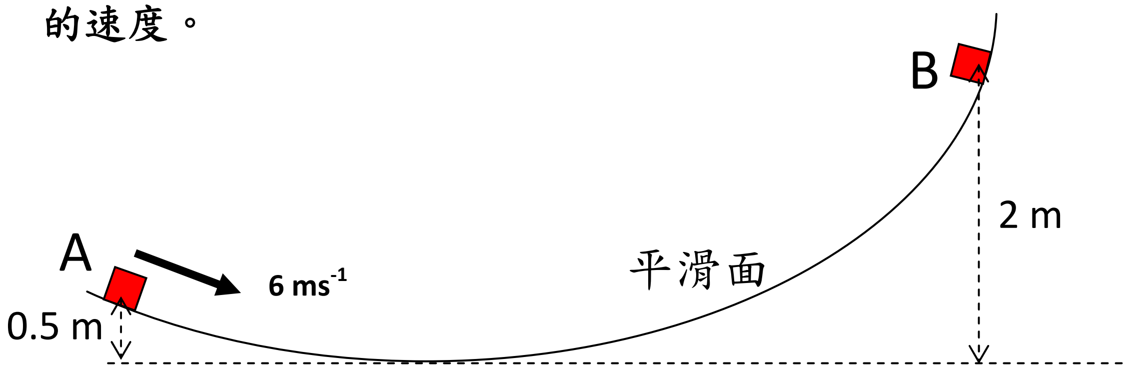
這三種數學表述方法是

(1) 一些能的增加等於另一些能的損失。

(2) 能量的總和為一常數。

(3) 各項能的改變值相加為零。

例：方塊在位置 A 的速度為 6 ms^{-1}。求方塊到達位置 B 時的速度。



因路面平滑沒有摩擦，所以機械能守恆。

設方塊在位置 B 的速度為 v_B。

方法 (1)：

勢能增加 (gain in PE) = 動能損失 (loss of KE)

$$mg(h_B - h_A) = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$$

方法 (2)：

$$(KE + PE)_A = (KE + PE)_B$$

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

方法 (3)：

$$\Delta PE + \Delta KE = 0$$

$$(mgh_B - mgh_A) + (\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2) = 0$$

當然，無論用那個方法，最後列出的數式相同。我們關心的只是那個方法對初學同學最有利，最不容易「出錯」。

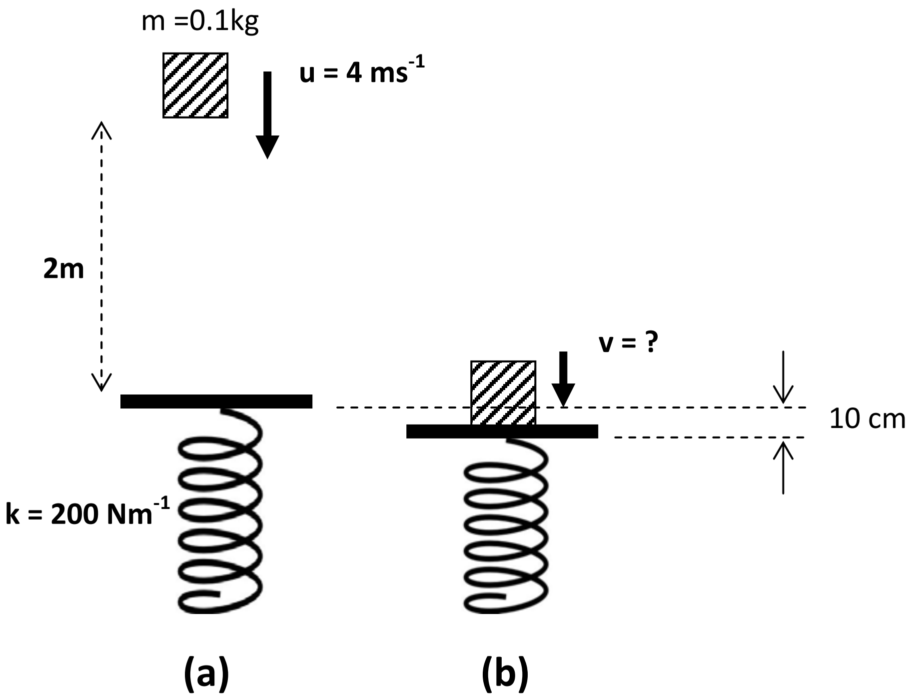
我們先列出這三種方法的特點，和使用它們時須注意的地方。

PE 損失 = KE 增加 **(或 KE 損失 = PE 增加)**	● 先了解問題，判斷是甚麼能量增加，甚麼能量損失。 ● 式中左、右項均是正數。所以都是<u>大減細</u>。
$(PE+KE)_A = (PE+KE)_B$	● 須計算在兩處位置的勢能，所以要設定勢能的參考水平 (reference level) 。
$\Delta PE + \Delta KE = 0$	● 每一個 Δ 都是<u>最後減原本</u> (final – initial)

方法 (1) (…能增加 = …能損失) 是中學同學常用的方法。 如果問題只涉及兩種能量的轉換，又或者是一種能量的全部轉換成另一種能量等這些較簡單問題，方法 (1) 是不錯的解題「切入點」。 但一旦遇上稍複雜一點的問題，此方法也很容易令學生在計算上「出錯」！

請看以下例子。

例：一 0.1 kg 方塊從高處以初速 $u = 4\ m^{-1}$ 擲向距離 2m 安置在地上的彈簧。問彈簧在壓縮 10 cm 時方塊的速度。彈簧的彈性常數是 $k = 200\ Nm^{-1}$。 假設彈簧和它的平台的質量可忽略不計及方塊撞向平台時沒有能量損失。



明顯，上圖由 (a) 至 (b) ，引力勢能 (mgh) 減小， 彈性勢能 (elastic pe $\frac{1}{2}ke^2$) 增加。但能量 ($\frac{1}{2}mv^2$) 是增加，還是減小？ 單看

數字看不出，直接硬代 “gain in... = loss of ....” 也不知應把 KE 放在那邊。這裡，應用公式之餘，還要加一些靈活分析，例如：

引力勢能的減小 $= mgh = 0.1 \times 9.81 \times (2 + 0.1) = 2.06$ J

彈性勢能增加 $= \frac{1}{2}ke^2 = \frac{1}{2}(200)(0.1^2) = 1$ J

∵引力勢能減小 > 彈性勢能增加

∴動能增加 $= 2.06 - 1 = 1.06$ J

$\therefore \frac{1}{2}(0.1)v^2 - \frac{1}{2}(0.1)4^2 = 1.06$

$\therefore\ v = 6.10\ ms^{-1}$

反之，如果用 sum 的方法，硬代公式就已踏出成功解題的正確一步了。

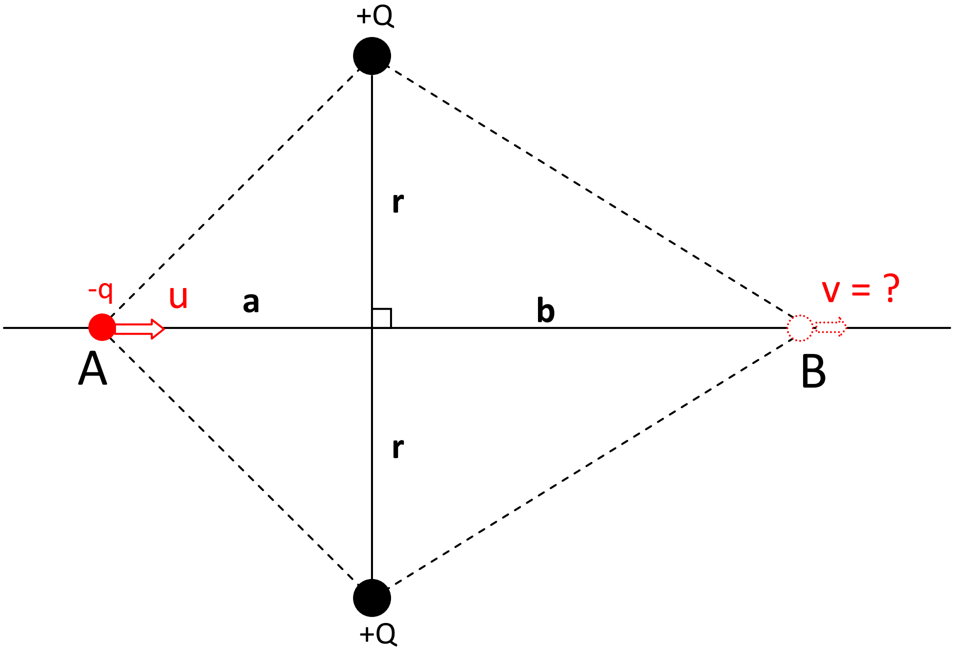
$$(\text{引力 PE+KE + 彈性 PE})_a = (\text{引力 PE+KE + 彈性 PE})_b$$

$$mgh(2.01) + \frac{1}{2}m(4^2) + 0 = 0 + \frac{1}{2}m(v^2) + \frac{1}{2}k(0.1^2)$$

....

我們再舉一例。

下圖 +Q 是正電荷、-q 是負電荷。已知 −q 在 A 的速度為 u，求 −q 到達 B 的速度 v。圖中 b > a。



這題涉及電勢能 PE = $\dfrac{-qQ}{4\pi\epsilon_o R}$ 。

電勢能是負數，所以 R 越大，其值越接近零，即是越大。

由 A 到 B，是電勢能增加 = 動能減小，所以

$$\frac{-qQ}{4\pi\epsilon_o\sqrt{r^2+b^2}} - \frac{-qQ}{4\pi\epsilon_o\sqrt{r^2+a^2}} = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

如果以 (KE + 電 PE)$_A$ = (KE + 電 PE)$_B$ 出發，就已「無風無浪」寫出

$$\left(\frac{1}{2}mu^2 + \frac{-qQ}{4\pi\epsilon_o\sqrt{r^2+a^2}}\right) = \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{-qQ}{4\pi\epsilon_o\sqrt{r^2+b^2}}\right)$$ 。

結語：

用方法 (1) [...能增加 = ...能損失] 來處理簡單問題，很好。但遇上較複雜的問題，就要先做分析、後用公式。

用方法 (2) [A 點能量和 = B 點能量和] 來處理容易或複雜問題，都是不須問甚麼能增加或損失，只要一招「代公式計之」就把問題解。

方法 (3) [Δ方法] 類似方法 (2) ，不過要謹記：計每一Δ都是 final - initial。

吳老師 (Chiu-king Ng)