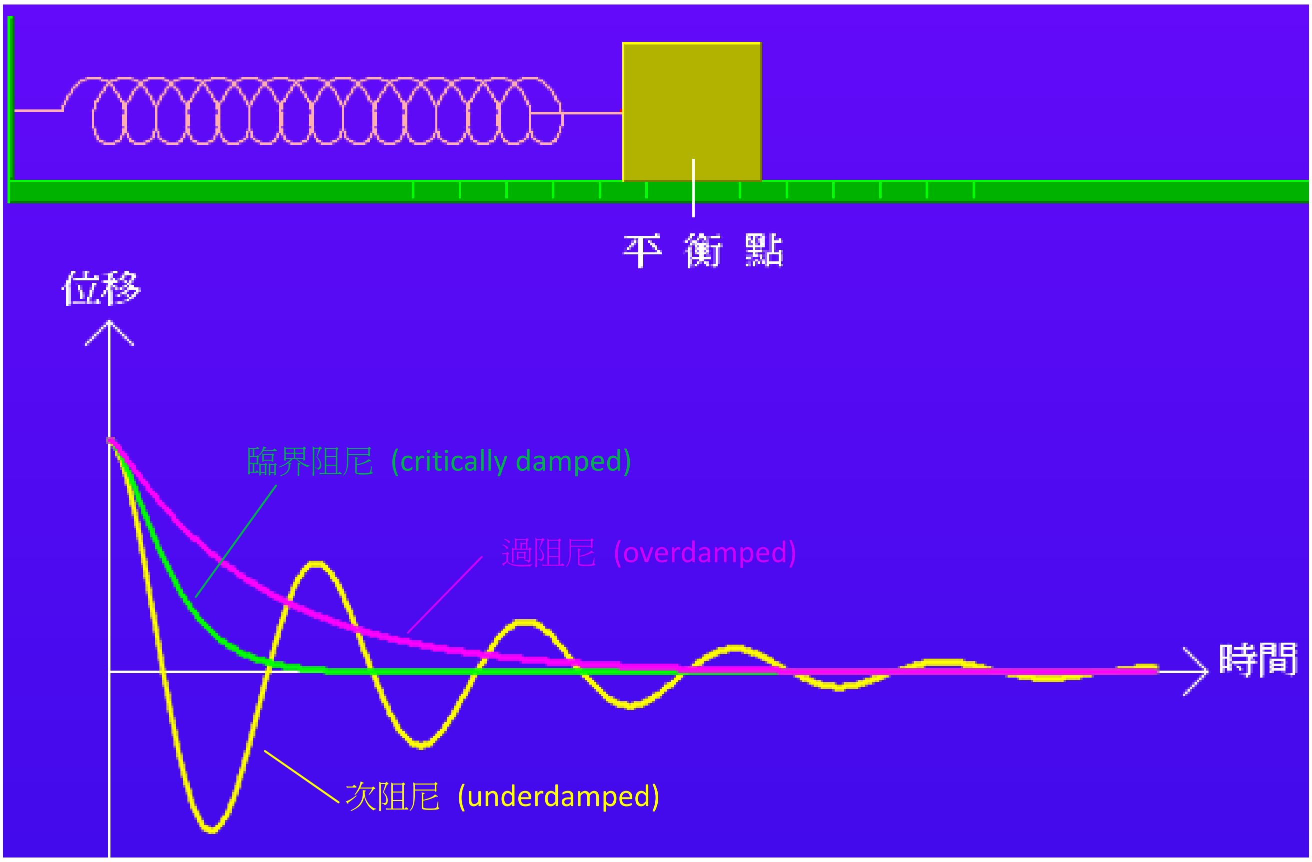
臨界阻尼和過阻尼諧振子可以過衡平衡點嗎？

Can critically damped and over-damped oscillators overshoot the equilibrium point?

當然可以，只要在釋放時給予一足夠大的向著平衡點初速。

Critically damped and over-damped oscillators can overshoot, provided a large enough origin-directing velocity is given at the moment of release.

學生的一般認知是當臨界阻尼振動（$b=\sqrt{4km}$）和過阻尼振動（$b>\sqrt{4km}$），諧振子不會產生真實的週期振動。 當釋放後，諧振子先作短暫加速，然後就減速；速度迅速減少，最後緩慢地走向平衡點。當到達平衡點時，速度為零。即是它們不會過衝(overshoot)平衡點。



http://phy.hk/wiki/chinesehtm/Damped.htm

事實是，臨界阻尼和過阻尼也一樣可以發生過衝。

我們先來一個初步論證，說明為甚麼會如此。然後才用數學作仔細分析。

(A) 質量 m 的振動物體受彈性回復力$-kx$ 和正比於速度的阻尼力作用。假設阻尼力為 $-bv$，其中b 是阻尼常數。設由平衡點指向物體的位移為 x。

為甚麼 「若物體在 $x = A$ 釋放時，也給予它足夠大的向著平衡點初速 u_o，物體就一定能過衡平衡點。」

釋放時總機械能 $\frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}mu_o^2$ 。
物體由 $x = A$ 直接返回平衡點 $x = 0$ 這段路程，阻尼力會消耗能量；克服阻尼力作的功是 $b\bar{v}A$，其中 $\bar{v}$ 是這路程 v 的空間平均。無論 $\bar{v}$ 與 u_o 的數學關係如何，它們必屬同一數量級。

即是說 能量中的動能正比於u_o 的二次級，而克服阻尼力作的功只正比於u_o的一次級。

若固定A 值，而隨意把 u_o 增大。合理推算，當u_o 大於某值，在A至0路途上阻尼力就不足以消耗盡原來的總機械能 (因為動能以 u_o^2 的形式增加，但克服阻尼力作的功只正比於u_o)。在這情況下，物體到達平衡點時就會仍然保留一部份動能，這即是會發生過衝。

(B) 傳統的 ODE 解 damped oscillations 。

牛頓第二定律

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0 \qquad (1)$$

Case 1: $\gamma > \omega_0$ （過阻尼）

假設

$$x=Ce^{-pt} \qquad (2)$$

其中 C和 p是常數。

代 (2) 入 (1) ，得

$$mp^2 - bp + k = 0 \qquad (3)$$

解 (3) ，$p = \frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$

引入符號

${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$ 和 $\gamma = \frac{b}{2m}$。那

$$p = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

因為過阻尼（$\gamma > \omega_0$），p為實數。

所以，

$$\boldsymbol{x = C_1 e^{-(\gamma-\alpha)t} + C_2 e^{-(\gamma+\alpha)t}} \qquad (4)$$

其中 C_1，C_2是由初始條件決定的常數和

$\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$。大家注意 $\alpha < \gamma$。

由 (4) ，得

$$\boldsymbol{v = \frac{dx}{dt} = -C_1(\gamma-\alpha)e^{-(\gamma-\alpha)t} - C_2(\gamma+\alpha)e^{-(\gamma+\alpha)t}} \qquad (5)$$

初始條件： 當 $\boldsymbol{t=0, x=A}$ 和 $\boldsymbol{v=u_o}$

從 (4) ，$\boldsymbol{C_1+C_2=A}$ **(6)**

從 (5) ，$\boldsymbol{-C_1(\gamma-\alpha)-C_2(\gamma+\alpha)=u_o}$ **(7)**

解聯立方程 (6) 和 (7)，得

$C_1=\frac{A(\gamma+\alpha)+u_o}{2\alpha}$ 和 $C_2=-\frac{A(\gamma-\alpha)+u_o}{2\alpha}$

所以，最後求得 $\boldsymbol{x}$

$$\boxed{\boldsymbol{x}=\frac{A(\gamma+\alpha)+u_o}{2\alpha}\boldsymbol{e}^{-(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{t}}-\frac{A(\gamma-\alpha)+u_o}{2\alpha}\boldsymbol{e}^{-(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{t}}}$$

(8)

檢驗能否過衝平衡點，設上式 (8) $x=0$，看看是否存在這樣的 t。

$x=0$ 即要求 $e^{2\alpha t}=\frac{A(\gamma-\alpha)+u_o}{A(\gamma+\alpha)+u_o}$，或

$$\boldsymbol{t}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{ln}\left[\frac{\boldsymbol{A(\gamma-\alpha)+u_o}}{\boldsymbol{A(\gamma+\alpha)+u_o}}\right] \quad (9)$$

因為 $\alpha=\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$ 和 γ 均是正數 及 $\gamma>\alpha$，

(1) 若 $\boldsymbol{u_o}=\mathbf{0}$ （釋放時沒有初速），$\frac{A(\gamma-\alpha)}{A(\gamma+\alpha)}<1$

那 t 是負，即 t 不存在有意義的解。

(2) 若 $\boldsymbol{u_o}>0$ （釋放時初速是正，即是背離平衡點衝出），

$\frac{A(\gamma-\alpha)+u_0}{A(\gamma+\alpha)+u_o}<1$， 那 t 仍然是負，即 t 不存在有意義的解。

(3) 若 $\boldsymbol{u_o}<0$ （釋放時初速是負，即是向著平衡點衝入），

$\frac{A(\gamma-\alpha)+u_0}{A(\gamma+\alpha)+u_o}$ 就可能大於 1。那時 t 是正數。這表示真存在 t 可使 x = 0。

[避開那些煩瑣的不等式，我們簡單舉以數字說明，譬如

$A(\gamma-\alpha)=2$，$A(\gamma+\alpha)=8$

在以上 (1) $t=\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{2}{8}\right)$ < 0

在以上 (2) $t=\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{2+u_o}{8+u_o}\right)$ < 0 （無論u_o是那一個正數）

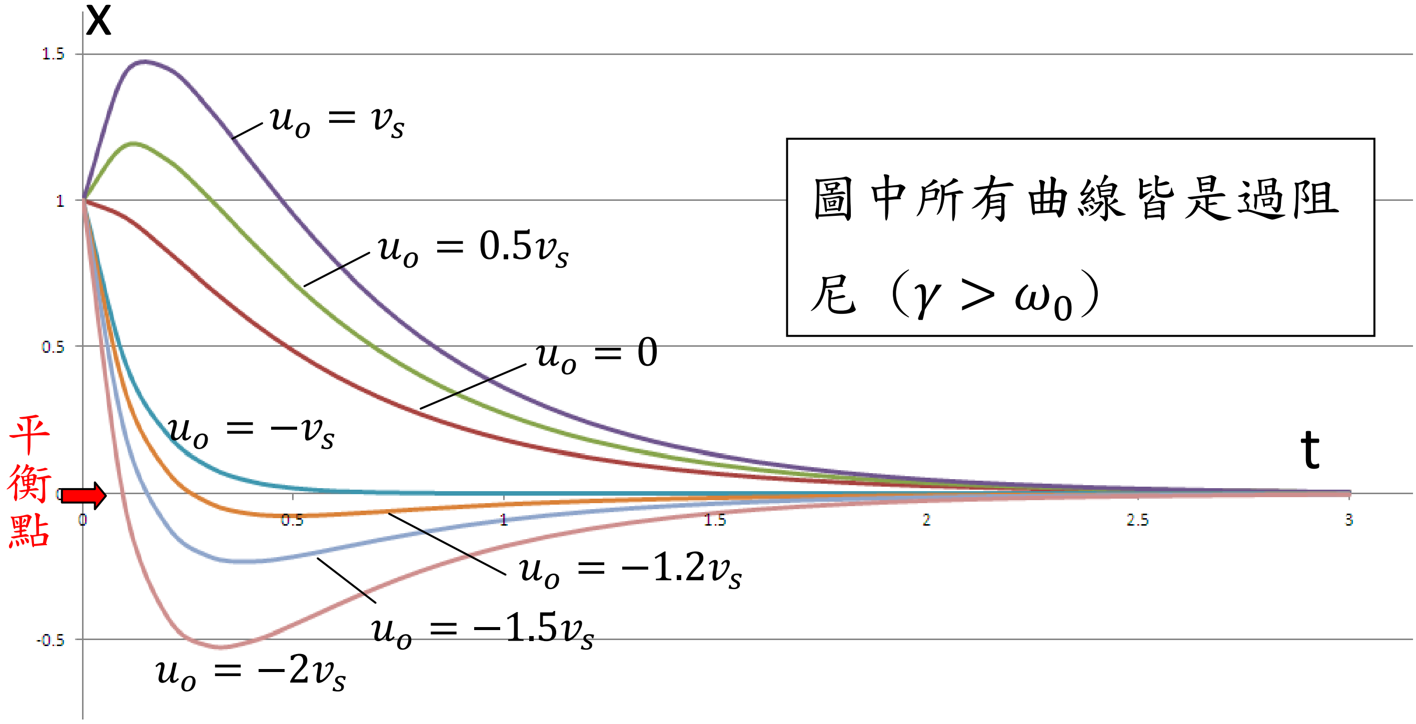
在以上 (3)，只要 $u_o<-8$， $t=\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{2+u_o}{8+u_o}\right)>0$]

在 $\gamma > \omega_0$情況下能夠過衝平衡點，諧振子在位置 A 釋放時必須具有量值 (magnitude) 大於 $A\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)$ 並向著平衡點的初速。

若定義符號 $v_s = A\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)$，

那我們可以v_s 為參數來繪畫 x-t （式 8）的圖。

我們設 ω_o =4 單位，$\gamma =$ 5 單位，A = 1 單位。所以 α = 3 單位及 $v_s = 8$ 單位。



Case 2: $\gamma = \omega_0$（臨界阻尼）

在這情況下，式 (1) 的通解是

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -\gamma(C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t}$$

初始條件： 當 $t = 0, x = A$ 和 $v = u_o$

因而求得 $C_1 = A$，$C_2 = A\gamma + u_o$

$$\therefore x = [A + (u_o + A\gamma)t]e^{-\gamma t}$$

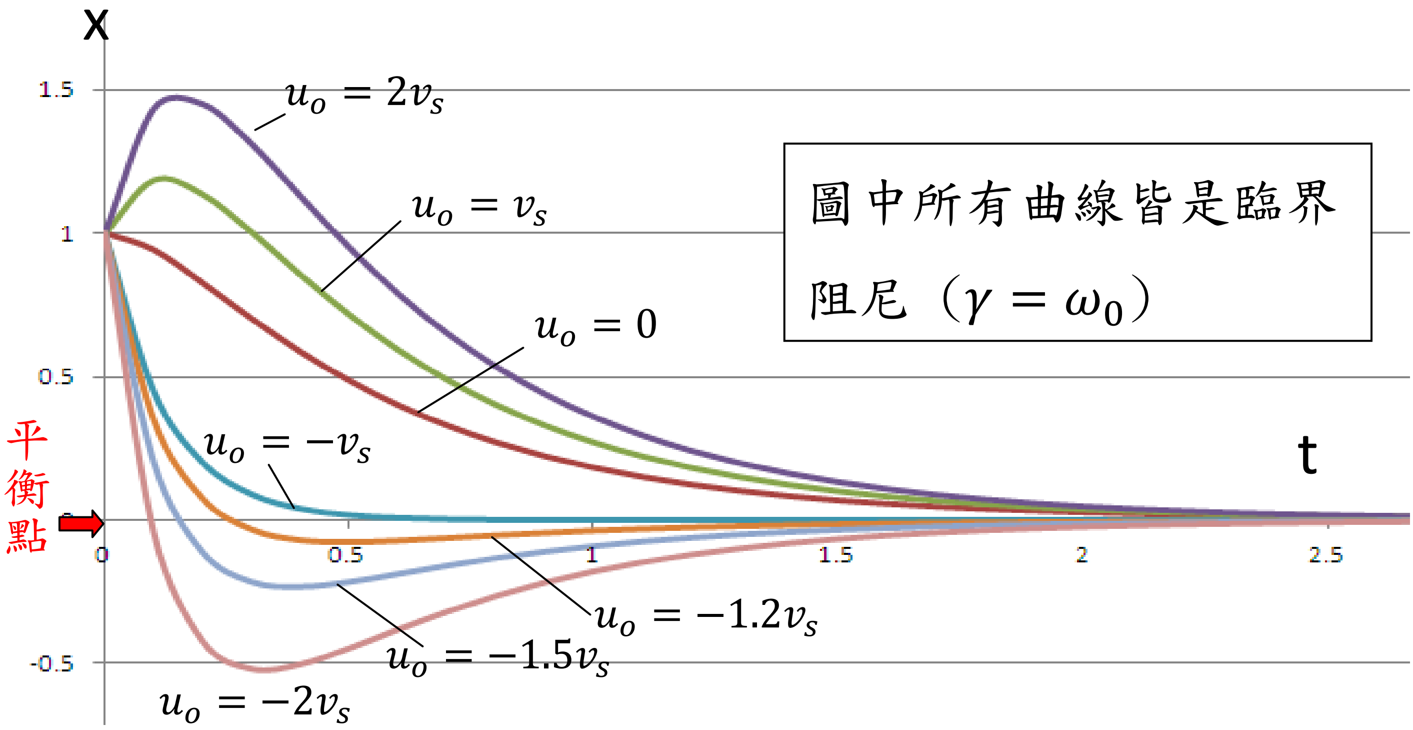
若設 $x = 0$，那 $t = \frac{-A}{A\gamma + u_o}$

$t > 0$才是有意義的解，這只有當 $u_o < -A\gamma$才發生。

在 $\gamma = \omega_0$情況下能夠過衝平衡點，諧振子在位置 A 釋放時必須具有量值 (magnitude) 大於 $A\gamma$ 並向著平衡點的初速。

這條件和過阻尼的相符一致。

設 $\gamma = 5$ 單位，A = 1 單位。那 $v_s = A\gamma = 5$ 單位



討論：

1. 不論是過阻尼和臨界阻界 ($\boldsymbol{\gamma \geq \omega_0}$)，只要當初速 $> A\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)$ 並向著平衡點，振動物體就會過衝平衡點，去了 $X < 0$ 的那一邊。這個過衝現象可視為一真實振動。**(即是在過阻尼和臨界阻尼，也可發生真實振動！)**

無論如何， 這個過衝如果發生，亦只可以發生一次。當諧振子過衝到了 $X < 0$ 的某一位置停下，其之後的運動就完全等同在該位置以零初速釋放它。在這情況(以零初速釋放)，是慣常討論的那種，即不會再發生過衝。

2. 若初速不是向入，而是向外 (離開平衡點) ，那也一定不會發生過衝。因為諧振子向外走，最後它必在比開始時更遠的某位置停下來。之後的運動就完全等同在該位置以零初速釋放它的情況，即不會再發生過衝。

3. 以上 (2) 的論點為甚麼不能應用於向入的初速？**在 $x = A$ 以初速 u_o 推向平衡點，不可以等同在比 A 更遠的某位置以零初速釋放嗎？ 如是，那就理應不會發生過衝！**

若果是無阻尼振動，任何的 $\frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}mu_o^2$ 都可以換成 $\frac{1}{2}kA'^2$。但是在阻尼振動，那就不一定可以。可不可以，要關乎下式的 A' 是否存在。

$$\frac{1}{2}kA'^2 \text{ - 克服阻尼力作的功 } = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}mu_o^2$$

即是 $\frac{1}{2}k({A'}^2 - A^2)$ - $b\bar{v}(A' - A)$ = $\frac{1}{2}mu_o^2$ ....(*)

其中 $\bar{v}$ 是路程 A' 至 A 的空間平均速度。

式 (*) 中 u_o大一些，A' 也要大一些。

諧振子的速度正比於振幅。 所以如果振幅是A' ，那$\overline{v}$也必然正比於 A'。即是說$\frac{1}{2}k(A'^2 - A^2)$ 和 $b\overline{v}(A' - A)$ 兩項中含著同數量級的A'。若阻尼常數 b 大於某臨界值，那就可能出現 $\frac{1}{2}k(A'^2 - A^2) < b\overline{v}(A' - A)$ 。這即是式 (*) 找不到 A'了。

作者：吳老師 (Chiu-king Ng)